

# Funciones de Morse minimales en espacios lentes $L(p, q)$ , vía la ecuación del calor

Por:

Juan Pablo Yáñez Puentes  
Oscar Abel Cardona Hurtado

Asesor

Doctor: Carlos Cadavid

Universidad EAFIT  
Departamento de Ciencias Básicas  
Medellín  
2014

# Funciones de Morse minimales en espacios lentes $L(p, q)$ , vía la ecuación del calor

Trabajo de grado para optar al título de  
Magister en Matemáticas Aplicadas

Por:

Juan Pablo Yáñez Puentes  
Oscar Abel Cardona Hurtado

Asesor

Doctor: Carlos Cadavid

Universidad EAFIT  
Departamento de Ciencias Básicas  
Medellín  
2014

# Dedicatoria

---

A nuestros padres,  
y familiares;  
que han sabido formar personas grandes  
desde sus hogares.  
Todo lo que somos se lo debemos a ellos.

# Agradecimientos

---

A Dios; al profesor Carlos Alberto Cadavid; a nuestros hermanos y demás familiares; a nuestras esposas Laura y Jhoanna; a nuestros compañeros; a los profesores de la maestría en matemáticas aplicadas; a todas las personas que de una u otra manera contribuyeron a la elaboración de este trabajo pues sin el apoyo y aliento de todos ellos, no habría sido posible realizarlo.

# Abstract

---

Let  $(M; g)$  be a compact, connected riemannian manifold that is homogeneous, i.e. each pair of points  $p, q \in M$  have isometric neighborhoods. This undergraduate thesis is a another step towards an understanding of the extent to which it is true that for each “generic” initial condition  $f_0$ , the solution to  $\partial f / \partial t = \Delta_g f$ ,  $f(\cdot, 0) = f_0$  is such that for sufficiently large  $t$ ,  $f(\cdot, t)$  is a minimal Morse function, i.e., a Morse function whose total number of critical points is the minimal possible on  $M$ . In this undergraduate thesis we show that for the lens spaces this seems to hold, exposing experimental evidence from its implementation in software (MAPLE 14).

# Índice general

---

<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>1. Nociones preliminares</b>	<b>10</b>
1.1. Conceptos de Topología Diferencial . . . . .	10
1.2. Funciones de Morse . . . . .	13
1.3. Variedad Riemanniana . . . . .	14
1.4. El Operador de Laplace-Beltrami y la Ecuación del Calor . . .	15
<b>2. Variedad riemanniana determinada por la acción de un grupo de isometrías sobre una variedad riemanniana</b>	<b>19</b>
2.1. Acción de un grupo sobre un conjunto . . . . .	19
2.2. Construcción cociente . . . . .	21
<b>3. Motivación y El Círculo</b>	<b>25</b>
3.1. Algunos Antecedentes . . . . .	25
3.2. Ejemplo $M = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . . . . .	26
<b>4. Espacios Lente</b>	<b>29</b>
4.1. Modelo algebraico de los espacios lente esféricos . . . . .	29
<b>5. Ecuación del calor sobre espacios lente</b>	<b>31</b>
5.1. Coordenadas Toroidales . . . . .	31
5.2. Autofunciones de los espacios lente . . . . .	34
5.3. Un ejemplo: Autofunciones de $L(2, 3)$ . . . . .	34

---

<b>6. Verificación Experimental</b>	<b>37</b>
6.1. Simulaciones . . . . .	39
6.1.1. Espacio Lenticular $L(2, 3)$ . . . . .	40
6.1.2. Espacio Lenticular $L(3, 2)$ . . . . .	42
6.1.3. Espacio Lenticular $L(4, 3)$ . . . . .	43
6.1.4. Espacio Lenticular $L(5, 2)$ . . . . .	45
<b>Conclusiones</b>	<b>48</b>
<b>Referencias</b>	<b>50</b>

---

# Introducción

---

La ecuación de calor, ha resultado de gran utilidad para el estudio de los valores propios de una variedad Riemanniana [1], dado que su solución muestra la relación entre esta ecuación y la distribución de valores propios del laplaciano, representado por una función kernel asociada a la ecuación del calor.

La comprensión de los puntos críticos de las funciones definidas sobre la variedad, ha suscitado el trabajo de matemáticos como Yau, D. Jakobson y N. Nadirashvili, Z. Tang y W. Yan, quienes han realizado estudios en este sentido como se aprecia en [2], [3] y [5].

Otros autores como Serge Lang y Jay Jorgenson resaltan el “el poder” del kernel calor [6], y lo presentan en el trabajo “*The Ubiquitous Heat Kernel*” en este artículo muestran el kernel del calor como un fenómeno universal presente en muchos argumentos de la matemática.

En particular en este trabajo de grado, se ha observado que existe al menos un función de Morse con el menor número de puntos críticos definidas sobre variedades como los espacios lente.

Los tres primeros capítulos constituyen los cimientos teóricos del trabajo, en el capítulo 1 se presentan los conceptos necesarios para la comprensión del resto del trabajo, allí se toman conceptos de Topología Diferencial, Teoría de Morse, y de la Ecuación del Calor. El capítulo 2 muestra como, si se parte de una variedad riemanniana  $M$  sobre la cual actúa, de manera apropiada, un grupo de isometrías  $G$ , se obtiene una nueva variedad riemanniana  $M/G$ . Este capítulo es clave para entender la manera como se construyen los espacios lente. El capítulo 3 muestra la motivación que lleva a la formulación de la pregunta de investigación y al desarrollo de este trabajo, además se plantea un ejemplo que resulta ser el punto de partida.

Posteriormente, en el capítulo 4 se describe la construcción de los espacios lente desde una perspectiva algebraica, haciendo uso de algunos conceptos



de los capítulos anteriores. EL objetivo del capítulo 5 es estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación del calor con dato inicial genérico, en los espacio lente esféricos. Ahora solucionar la ecuación del calor en una variedad riemanniana se reduce a conocer los autovalores  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots$  y autoespacios  $E_j$  del operador de Laplace-Beltrami de la variedad, como se presenta en el artículo de Weeks, donde se presenta un método para calcular explícitamente los autovalores y las autofunciones de cada espacio lente esférico  $L(p, q)$ .

Por último en el capítulo 6 se explica la teoría base para la implementación en el software MAPLE 14, además se muestran simulaciones para algunos espacios lente donde el fenómeno se presenta.

Con esta presentación se cumplen los objetivos propuestos en el proyecto de grado. La discusión sobre los resultados del mismo se muestran en el capítulo de conclusiones.

---

## Capítulo 1

# Nociones preliminares

---

En este capítulo presentamos los conceptos necesarios para la comprensión del resto del trabajo. Ellos abarcan conceptos de Topología Diferencial, Teoría de Morse, y de la Ecuación del Calor.

### 1.1. Conceptos de Topología Diferencial

La topología diferencial tiene sus bases en el concepto de  $m$ -variedad topológica, por lo que es necesario abordar su definición.

**Definición 1.** *Sea  $m$  un entero no negativo. Una  $m$ -variedad topológica es un espacio topológico  $(M, \tau)$  de Hausdorff, 2-contable, y localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ .*

Esta última condición significa que, para cada  $x \in M$ , existe un abierto  $U_x$  con  $x \in U_x$  de tal manera que  $U_x$  dotado de la topología de subespacio de  $(M, \tau)$  es homeomorfo a un abierto  $V_x$  de  $\mathbb{R}^m$  dotado de la topología de subespacio de  $(\mathbb{R}^m, \tau_{usual})$ .

Algunos ejemplos de la definición anterior se presentan a continuación.

**Ejemplo 1.** 1. *Un espacio topológico  $(M, \tau)$  es una 0-variedad topológica si y sólo si se verifica*

a)  $M$  es numerable

b)  $\tau = \mathcal{P}(X) = \{A/A \subset M\}$

2. *Si  $U$  es un subconjunto abierto de una  $m$ -variedad topológica  $(M, \tau)$ , entonces  $U$ , visto como subespacio topológico es a su vez una  $m$ -variedad topológica.*

3.  $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$  es una 1-variedad topológica.
4. El círculo  $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  visto como subespacio de  $(\mathbb{R}^2, \tau_{usual})$  es una 1-variedad topológica.

A continuación se construyen las nociones de estructura suave para una  $m$ -variedad topológica, esto es, de  $m$ -variedad suave, y de función suave entre variedades suaves. Para ello necesitaremos la siguiente definición. Si  $U \subset \mathbb{R}^k$  es un abierto y  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  es una función, decimos que  $F$  es suave, si todas sus derivadas parciales de todos los ordenes existen y son continuas en  $U$ . Ahora, si  $A \subset \mathbb{R}^k$  y  $B \subset \mathbb{R}^l$ , una función  $f : A \rightarrow B$  es suave, si para cada  $a \in A$  existe un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ , con  $a \in U$ , y una función suave  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  tal que  $F|_{A \cap U} = f$ . Una función suave  $f : A \rightarrow B$  es un difeomorfismo, si  $f$  es biyectiva y su inversa  $f^{-1}$  es suave. Se dice que  $A$  y  $B$  son difeomorfos (entre sí), si existe algún difeomorfismo del uno en el otro.

Sea  $M$  una  $m$ -variedad topológica. Una carta en  $M$  es un par  $(U, \varphi)$  donde  $U$  es un abierto de  $M$ , y  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es tal que  $\varphi(U)$  es un abierto, y  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es un homeomorfismo, donde  $U$  y  $\varphi(U)$  se toman con la estructura de subespacio de  $M$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente.

Dos cartas  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  de  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$  se dice que son *suave compatibles* si la función  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  es un difeomorfismo entre subconjuntos de  $\mathbb{R}^m$ .

Cabe resaltar que la función anterior se conoce como *función de cambio de cartas* o *de cambio de coordenadas*.

Un atlas para  $M$  es una familia  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  de cartas de  $M$  tal que  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ . Siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , a la función de cambio de coordenadas  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  la denotaremos por  $\varphi_{\beta\alpha}$ . Note el orden de los subíndices.

Un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  para  $M$  se dice *suave compatible* si para todo par  $\alpha, \beta \in I$  tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , las cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ,  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  son suave compatibles. En este caso cada  $\varphi_{\beta\alpha}$  es un difeomorfismo entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$ . A la matriz jacobiana de  $\varphi_{\beta\alpha}$  en el punto  $\mathbf{x} \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$  la denotaremos como  $J_{\beta\alpha}(\mathbf{x})$ .

Ahora, un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  para  $M$  se dice que es *maximal* si cada carta  $(V, \psi)$  para  $M$  tal que  $(V, \psi) \neq (U_\alpha, \varphi_\alpha)$  para todo  $\alpha \in I$  no es suave compatible con alguna  $(U_{\alpha_0}, \varphi_{\alpha_0})$ .

**Definición 2.** Una  $m$ -variedad suave es un par  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es una  $m$ -variedad topológica, y  $\mathcal{A}$  es un atlas para  $M$  que es suave compatible y

*maximal.*

Es importante observar que para especificar una estructura suave para una variedad topológica  $M$ , es decir, un atlas suave compatible y maximal para  $M$ , basta con especificar un atlas suave compatible para  $M$  no necesariamente maximal, puesto que, como resulta fácil verificar, cada atlas suave compatible esta contenido por un único atlas suave compatible maximal.

**Ejemplo 2.** Sea  $(M, \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\})$  una  $m$ -variedad suave y sea  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ . Entonces la colección  $\{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : \alpha \in I\}$  es un atlas suave para  $U$ , que hace de  $U$  una  $m$ -variedad suave.

**Ejemplo 3.** Sea  $m$  un entero no negativo. Si definimos a  $\mathcal{A}_{usual}$  como el único atlas maximal de  $(\mathbb{R}^m, \tau_{usual})$  que contiene la carta  $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$  donde  $id_{\mathbb{R}^m}$  denota a la función identidad de  $\mathbb{R}^m$  en si mismo, entonces  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{A}_{usual})$  es una  $m$ -variedad suave. En lo que sigue,  $\mathbb{R}^m$  se considerará como dotado de esta estructura. Así, cuando escribamos  $\mathbb{R}$  en lo que resta de este trabajo, supondremos que nos referimos a la 1-variedad suave  $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{usual})$ .

Con las definiciones anteriores, una función suave entre variedades suaves se define como sigue.

**Definición 3.** Sean  $(M, \mathcal{A})$  una  $m$ -variedad suave,  $(N, \mathcal{B})$  una  $n$ -variedad suave, y sea  $f : M \rightarrow N$ . Se dice que  $f$  es suave, si para todo par de cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  en  $\mathcal{A}$  y  $(V_\beta, \psi_\beta)$  en  $\mathcal{B}$ , tales que  $f(U_\alpha) \subset V_\beta$ , se tiene que  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$  es suave.

**Definición 4.** Sea  $(M, \mathcal{A})$  una  $m$ -variedad suave y  $(N, \mathcal{B})$  una  $n$ -variedad suave. Una función  $f : M \rightarrow N$ , se dice que es un difeomorfismo si

1.  $f$  es biyectiva.
2.  $f$  es suave y  $f^{-1}$  es suave.

Se dice que una  $m$ -variedad y una  $n$ -variedad suaves son difeomorfas si existe al menos un difeomorfismo entre ellas. Se puede demostrar que si una  $m$ -variedad y una  $n$ -variedad suaves son difeomorfas, entonces  $m = n$ .

## 1.2. Funciones de Morse

Las funciones de Morse de una variedad suave son un tipo especial de funciones suaves definidas en la variedad y que toman valores en  $\mathbb{R}$ , que juegan un papel protagónico en topología diferencial, ya que su estructura esta intimamente ligada con la topología de la variedad. En esta sección introducimos esta noción.

**Definición 5.** Sea  $M$  una variedad suave y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Se dice que  $p_0 \in M$  es un punto crítico de  $f$  si para al menos una carta  $(U, \varphi)$  con  $p_0 \in U$ , se cumple que  $\varphi(p_0)$  es un punto crítico de la función  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, un punto en el que todas las primeras derivadas parciales son cero.

Se puede ver que si esto ocurre para una carta que contenga a  $p_0$ , entonces ocurrirá en todas las cartas que contengan a  $p_0$ . Entonces, en la definición anterior se pudo haber dicho “en toda carta”, en vez de “si para al menos una carta”.

**Definición 6.** Sea  $M$  una  $m$ -variedad suave,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $p_0 \in M$  un punto crítico de  $f$ . Entonces decimos que  $p_0$  es un punto crítico no degenerado si para al menos una carta  $(U, \varphi)$  tal que  $p_0 \in U$ , se cumple que la matriz de  $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1 \partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2 \partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_m \partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_m \partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_m^2}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

donde  $\mathbf{x}_0$  denota a  $\varphi(p_0)$ , es no singular, es decir, tiene determinante distinto de cero.

Se puede ver que si lo anterior ocurre en una carta que contiene a  $p_0$ , entonces ocurrirá en toda carta que contenga a  $p_0$ . Entonces, en la definición anterior se pudo haber dicho “en toda carta”, en vez de “si para al menos una carta”.

Para terminar esta sección se definen las funciones de Morse.

**Definición 7.** Sea  $M$  una variedad suave. Una función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es de Morse si cada uno de sus puntos críticos es no degenerado.

Note que de acuerdo a esta definición, una función sin puntos críticos es automáticamente una función de Morse. Algunos autores agregan a la definición de función de Morse el requerimiento de que la función sea inyectiva cuando se restringe al conjunto de sus puntos críticos.

### 1.3. Variedad Riemanniana

Sea  $A$  una matriz real de  $m \times m$ . Recordemos que se dice que  $A$  es *simétrica* si  $A = A^T$ ; y se dice que  $A$  es *definida positiva* si para cada matriz  $\mathbf{x}$  de  $m \times 1$  que no sea nula se cumple que  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ . Denotemos como  $Mat(m)$  al conjunto formado por las matrices reales de  $m \times m$ , y como  $Mat_{s,dp}(m)$  al subconjunto de  $Mat(m)$  formado por las matrices reales de  $m \times m$  que son simétricas y definidas positivas. Consideramos a  $Mat(m)$  como identificado con  $\mathbb{R}^{m^2}$  (por ejemplo, enviando cada matriz  $A = [a_{ij}]$  en el vector cuya componente  $m(i-1) + j$  es  $a_{ij}$ .) Sea  $(M, \mathcal{A})$  una  $m$ -variedad suave. Una estructura riemanniana en  $(M, \mathcal{A})$  es una regla  $g$  que le asigna a cada carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  en  $\mathcal{A}$ , una función  $g^\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow Mat_{s,dp}(m)$  de tal manera que:

1. para cada  $\alpha \in I$ ,  $g^\alpha$ , vista como una función de  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  en  $\mathbb{R}^{m^2}$ , es suave y
2. siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , se tenga

$$g^\alpha(\varphi_\alpha(p)) = J_{\beta\alpha}^T(\varphi_\alpha(p)) g^\beta(\varphi_\beta(p)) J_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(p)),$$

para cada  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ .

Para cada  $\alpha \in I$  e  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , definimos la función  $g_{ij}^\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  como aquella que envía a  $\mathbf{x}$  en la componente  $(i, j)$  de la matriz  $g^\alpha(\mathbf{x})$ .

Es importante observar que para definir una estructura riemanniana en una variedad suave  $(M, \mathcal{A})$ , basta tomar una subatlas  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  y especificar para cada carta  $C = (U, \varphi)$  en  $\mathcal{B}$  una función  $g^C : \varphi(U) \rightarrow Mat_{s,dp}(m)$  de tal manera que se cumplan las dos propiedades mencionadas anteriormente.

Una estructura riemanniana definida en una variedad suave  $M$  permite “medir” curvas de manera coherente en  $M$ , y por tanto, permite “hacer geometría” en  $M$ .

**Definición 8.** Sean  $(M, \mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\})$  y  $(N, \mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\})$   $m$ -variedades suaves, donde los atlas  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  no son necesariamente maximales. Sea  $g$  y  $h$  estructuras riemannianas para  $M$  y  $N$ , respectivamente. Una función suave  $f : M \rightarrow N$  se dice que es una isometría si satisface las siguientes condiciones:

1.  $f$  es un difeomorfismo
2. para todo par de cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(V_\beta, \psi_\beta)$  tales que  $f(U_\alpha) \subset V_\beta$ , se tiene que para cada  $\mathbf{x} \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ ,

$$g^\alpha(\mathbf{x}) = (J_{\tilde{f}}(\mathbf{x}))^T h^\beta(\mathbf{y}) J_{\tilde{f}}(\mathbf{x}),$$

donde  $\tilde{f} := \psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ,  $\mathbf{y} := \tilde{f}(\mathbf{x})$  y  $J_{\tilde{f}}(\mathbf{x})$  es la matriz jacobiana de  $\tilde{f}$  en el punto  $\mathbf{x}$ .

Se puede ver que si  $f$  es un isometría entre variedades riemannianas, entonces su inversa  $f^{-1}$  es también una isometría. Dos variedades riemannianas se dice que son *isométricas* si existe una isometría que va de una de ellas en la otra.

## 1.4. El Operador de Laplace-Beltrami y la Ecuación del Calor

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana, y sea

$$C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es suave}\}.$$

El *operador de Laplace-Beltrami* en  $M$  es la función  $\Delta_g : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que le asigna a una  $f \in C^\infty(M)$  otra función  $\Delta_g(f) \in C^\infty(M)$  que se define de la siguiente manera: se toma un atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  para  $M$  (no necesariamente maximal); para cada  $\alpha$ , se toma la función  $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  y se calcula la función  $h_\alpha$ , de  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  en  $\mathbb{R}$ , que envía a  $\mathbf{x}$  en

$$\frac{1}{\sqrt{\det(g^\alpha(\mathbf{x}))}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{\det(g^\alpha(\mathbf{x}))} \sum_{j=1}^m g^{\alpha,ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right).$$

donde  $g^{\alpha,ij}(\mathbf{x})$  denota la componente  $(i, j)$  de la matriz  $(g^\alpha(\mathbf{x}))^{-1}$ . Se puede ver que para cada  $\alpha \in I$ , la función  $h_\alpha$  es una función suave en  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  y que

siempre que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , se tiene  $h_\alpha = h_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$ . Esto implica que la regla  $h$  que envía a  $p \in M$  en  $h_\alpha(\varphi_\alpha(p))$  donde  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  es alguna carta tal que  $p \in U_\alpha$ , es una función bien definida y suave de  $M$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces  $\Delta_g(f)$  es esta  $h$ .

**Nota 1.** Se puede verificar que si  $F : (M, g) \rightarrow (N, h)$  es una isometría, entonces para toda  $f \in C^\infty(N)$  se tiene que  $F \circ \Delta_h(f) = \Delta_g(F \circ f)$ .

Pasamos ahora a definir la ecuación del calor en una variedad riemanniana.

La ecuación del calor en una variedad riemanniana  $(M, g)$  es la ecuación diferencial parcial  $\partial f / \partial t = \Delta_g f$ . Una solución al problema de condición inicial

$$\begin{cases} \partial f / \partial t = \Delta_g f \\ f(\cdot, 0) = f_0 \in L^2(M) \end{cases} \quad (1.1)$$

es una función continua  $f : M \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

1. Para cada  $t > 0$  fijo,  $f(\cdot, t)$  es una función  $C^2$ , y para cada  $x \in M$ ,  $f(x, \cdot)$  es  $C^1$ .
2.  $\partial f / \partial t = \Delta_g f$ , y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_M f(x, t) \psi(x) dV(x) = \int_M f_0(x) \psi(x) dV(x),$$

para toda  $\psi \in C^\infty(M)$ .

Es un hecho no trivial que para cada  $t > 0$ ,  $f_t = f(\cdot, t)$  es suave ([7], [8]). Es un hecho bien conocido que la solución al problema (1.1) puede ser obtenida de la siguiente manera. En primer lugar, se puede ver que los autovalores del operador  $\Delta_g$ , entendidos como aquellos  $\lambda \in \mathbb{R}$  para los que  $\Delta_g f + \lambda f = 0$  para alguna función suave  $f$  no idénticamente cero, son no negativos y forman un conjunto discreto ([7], [8]),  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_j < \dots$ . Más aún, para cada  $j \geq 0$ , el autoespacio correspondiente  $E_j$  tiene dimensión finita  $m_j$  y  $E_j \subset C^\infty(M)$ . Si suponemos que  $M$  es conexa,  $E_0$  resulta ser el espacio vectorial de dimensión 1 formado por todas las funciones constantes. Para cada  $j \geq 0$  sea  $B_j = \{\phi_{j,i} : i = 1, \dots, m_j\}$  una base ortonormal para  $E_j$ . Su unión  $B = \cup B_j$  es una base ortonormal para  $L^2(M)$ . Entonces, la solución al problema (1.1) puede ser escrita como

$$f = \sum_{j \geq 0} e^{-\lambda_j t} \sum_{i=1}^{m_j} \langle f_0, \phi_{j,i} \rangle_{L^2(M)} \phi_{j,i}, \quad (1.2)$$



donde  $\langle -, - \rangle_{L^2(M)}$  denota al producto interno usual en  $L^2(M)$ .

Este trabajo es motivado por la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto es cierto que para cada condición inicial “genérica”  $f_0$ , la solución a (1.1) es tal que para  $t$  suficientemente grande,  $f_t$  es una función de Morse minimal, es decir, una función de Morse cuyo número total de puntos críticos es menor o igual que el de cualquiera otra función de Morse en  $M$ ? En esta tesis se muestra evidencia experimental de que la respuesta parece ser afirmativa cuando  $(M, g)$  es un espacio lente. Un ingrediente que será clave es el siguiente resultado, el cual es un corolario del famoso *Teorema de Estabilidad de Mather*[9].

**Teorema 1** (Estabilidad de las funciones de Morse). *Sea  $M$  una variedad suave y sea  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse. Entonces, existe una vecindad abierta  $W_h$  en la topología  $C^\infty$  de  $(\text{of } C^\infty(M))$  tal que toda función  $\varphi \in W_h$  es Morse y tiene el mismo número de puntos críticos que  $h$ . Si  $M$  es compacta, la topología  $C^\infty$  (de  $C^\infty(M)$ ) es la unión de todas las topologías  $C^r$  (de  $C^\infty(M)$ ) [10], por lo que en este caso la conclusión puede rephrasearse así: Existe  $r > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que, si  $\|\varphi - h\|_r < \epsilon$  para  $\varphi \in C^\infty(M)$  y  $\|\cdot\|_r$  es la  $C^r$ -norma, entonces  $\varphi$  es también una función de Morse con el mismo número de puntos críticos que  $h$ .*

Los siguientes dos teoremas son también fundamentales en el presente trabajo.

**Teorema 2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana compacta. Si para una base  $B_1 = \{\psi_1, \dots, \psi_{m_1}\}$  del autoespacio  $E_1$  se cumple que el conjunto*

$$\{(a_1, \dots, a_{m_1}) \in \mathbb{R}^{m_1} : a_1\psi_1 + \dots + a_{m_1}\psi_{m_1} \text{ es de Morse minimal}\}$$

*es un abierto denso, entonces existe un subconjunto  $U$  de  $L^2(M)$ , abierto y denso, tal que si  $f_t$  es la solución de la ecuación del calor en  $(M, g)$  con dato inicial  $f_0 \in U$ , se tiene que existe  $T_{f_0} > 0$  tal que si  $t \geq T$ ,  $f_t$  es una función de Morse minimal de  $M$ .*

Por supuesto, en este teorema,  $U$  es el conjunto formado por aquellas funciones de  $L^2(M)$  cuya proyección en el autoespacio  $E_1$  es una función de Morse minimal. En este trabajo se presenta evidencia experimental de que en algunos espacios lente se cumple la hipótesis del teorema 2.

**Teorema 3.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana compacta. Si para unas bases  $B_1 = \{\psi_1, \dots, \psi_{m_1}\}$  y  $B_2 = \{\phi_1, \dots, \phi_{m_2}\}$  de los autoespacios  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, se cumple que existe  $\epsilon > 0$  tal que si*

$$S_\epsilon = \{(a_1, \dots, a_{m_1}, b_1, \dots, b_{m_2}) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2} : a_1^2 + \dots + a_{m_1}^2 = 1, b_1^2 + \dots + b_{m_2}^2 < \epsilon^2\},$$

*el conjunto formado por aquellos  $(a_1, \dots, a_{m_1}, b_1, \dots, b_{m_2}) \in S_\epsilon$  para los que  $a_1\psi_1 + \dots + a_{m_1}\psi_{m_1} + b_1\phi_1 + \dots + b_{m_2}\phi_{m_2}$  es de Morse minimal, es un abierto denso de  $S_\epsilon$ , entonces existe un subconjunto  $U$  de  $L^2(M)$ , abierto y denso, tal que si  $f_t$  es la solución de la ecuación del calor en  $(M, g)$  con dato inicial  $f_0 \in U$ , se tiene que existe  $T_{f_0} > 0$  tal que si  $t \geq T$ ,  $f_t$  es una función de Morse minimal de  $M$ .*

En este trabajo se presenta evidencia experimental de que en algunos espacios lente se cumple la hipótesis del teorema 3.

# Variedad riemanniana determinada por la acción de un grupo de isometrías sobre una variedad riemanniana

---

En este capítulo se muestra como, si se parte de una variedad riemanniana  $M$  sobre la cual actúa, de manera apropiada, un grupo de isometrías  $G$ , se obtiene una nueva variedad riemanniana  $M/G$ . Este capítulo es clave para entender la manera como se construyen los espacios lente.

## 2.1. Acción de un grupo sobre un conjunto

**Definición 9.** Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto. Una acción (a izquierda) de  $G$  sobre  $X$ , es una función  $a : G \times X \rightarrow X$  que satisface:

1.  $\forall x \in X, a(e, x) = x$ ,
2.  $\forall g, h \in G, \forall x \in X \quad a(h, a(g, x)) = a(hg, x)$ .

Usualmente se escribe  $gx$  en vez de  $a(g, x)$  con lo que las condiciones 1 y 2 se pueden escribir como  $\forall x \in X, ex = x$  y  $\forall g, h \in G, \forall x \in X \quad h(gx) = (hg)x$ , respectivamente.

**Definición 10.** Sea  $a : G \times X \rightarrow X$  una acción.

1. Se dice que  $a$  es efectiva si  $g \in G$  es tal que  $gx = x \quad \forall x \in X$ , entonces  $g = e$ . (Equivalentemente:  $\forall g \in G \quad g \neq e, \exists x \in X$  tal que  $gx \neq x$ )

2. Se dice que  $a$  es libre si se cumple que  $g \in G$  es tal que  $\exists x \in X$  con  $gx = x$ , entonces  $g = e$ . (Equivalentemente:  $\forall g \in G, g \neq e, gx \neq x \forall x \in X$ )

Claramente una acción libre es efectiva.

Una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$  induce la siguiente relación en  $X$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } gx = y.$$

Veamos que esta relación es de equivalencia.

- Reflexiva: para cada  $x \in X$  se tiene que  $x \sim x$ , ya que  $ex = x$ .
- Simétrica: Si  $x \sim y$ , entonces existe  $g \in G$  tal que  $gx = y$ . Entonces  $g^{-1}(gx) = g^{-1}y \Rightarrow (g^{-1}g)x = g^{-1}y \Rightarrow ex = g^{-1}y \Rightarrow x = g^{-1}y$ . Esta última igualdad nos dice que  $y \sim x$ .
- Transitiva: Si  $x \sim y$  y  $y \sim z$ , entonces existen  $g, h \in G$  tales que  $gx = y$  y  $hy = z$ . Sustituyendo, obtenemos  $h(gx) = z$ , con lo que  $(hg)x = z$ . Esta última igualdad nos dice que  $x \sim z$ .

**Definición 11.** A las clases de equivalencia determinadas por  $\sim$  las llamamos órbitas de la acción  $a$ .

Al conjunto formado por las órbitas se le denota como  $X/G$ . A la órbita de  $x \in X$  la denotaremos como  $Gx$ . Así

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

Cuando tenemos una acción de  $G$  sobre  $X$ , cada elemento  $g \in G$  induce una función  $T_g : X \rightarrow X$ , definida como  $T_g(x) = gx$ ; los axiomas de acción muestran que para cada  $g \in G$ ,  $T_{g^{-1}} \circ T_g = T_g \circ T_{g^{-1}} = id_X$ , lo cual nos dice que cada  $T_g$  es siempre una biyección. La función  $T_g$  se llama *translación de  $X$  por  $g$* . La función  $q : X \rightarrow X/G$  que envía a cada  $x \in X$  en su órbita  $Gx$  se llama *proyección canónica*.

---

## 2.2. Construcción cociente

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f : X \rightarrow Y$ . Se puede ver que la colección  $\tau_f := \{A \subset Y / f^{-1}(A) \in \tau\}$  es una topología para  $Y$ , y que esta topología hace que la función  $f$  sea continua. De hecho, resulta inmediato ver que cualquiera otra topología en  $Y$  según la cual  $f$  fuera continua, contendría a  $\tau_f$ . Esto se expresa diciendo que la topología  $\tau_f$  es la topología más gruesa (o más débil, o más pequeña), que hace que  $f$  sea continua. Ahora, si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico sobre el que esta definida una acción de un grupo  $G$ , podemos dotar al conjunto  $X/G$  de una topología usando el procedimiento anterior, tomando a  $X/G$  como  $Y$  y a la proyección canónica  $q : X \rightarrow X/G$  como  $f$ . El siguiente teorema nos da condiciones bajo las cuales, si  $(X, \tau)$  es una  $m$ -variedad topológica, entonces  $(X/G, \tau_q)$  es una  $m$ -variedad topológica.

**Teorema 4.** *Sea  $(X, \tau)$  una  $m$ -variedad topológica, y sea  $a$  una acción de un grupo  $G$  sobre  $X$ . Si  $a$  satisface las tres condiciones:*

1. *Para cada  $g \in G$ ,  $T_g : X \rightarrow X$ ,  $g \in G$  es un homeomorfismo*
2. *para cada  $x \in X$  existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U$  y  $gU \cap U = \emptyset$  para cada  $g \neq e$*
3. *para todo par de puntos  $x, y \in X$  con  $y \notin Gx$ , existen abiertos  $U$  y  $V$ , con  $x \in U$  y  $y \in V$ , tales que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g \in G$ .*

*entonces  $(X/G, \tau_q)$  es una  $m$ -variedad topológica. Más aún, la proyección canónica  $q : X \rightarrow X/G$  resulta ser una función recubridora, es decir, una función continua y sobreyectiva con la propiedad de que para cada  $y \in X/G$  existe un abierto  $V$  con  $y \in V$  tal que el abierto  $q^{-1}(V)$  se puede escribir como una unión  $\cup_{x \in q^{-1}(y)} U_x$  donde cada  $U_x$  es un abierto con  $x \in U_x$ ,  $U_x \cap U_{x'} = \emptyset$  siempre que  $x \neq x'$ , y cada función  $q : U_x \rightarrow V$  es un homeomorfismo. En particular,  $q$  es un homeomorfismo local, es decir, para cada  $x \in X$  existe un abierto  $U$  con  $x \in U$  tal que  $q : U \rightarrow q(U)$  es un homeomorfismo.*

Se puede ver que las condiciones 1 implica que si  $U$  es un abierto en  $X$  entonces  $q(U)$  es abierto, y además que si  $U$  es tal que  $gU \cap U = \emptyset$  para cada  $g \in G$  entonces  $q : U \rightarrow q(U)$  es un homeomorfismo. Así, como  $U$  es una  $m$ -variedad topológica,  $q(U)$  es una  $m$ -variedad topológica. Finalmente, la condición 2 nos dice que los  $U$  tales que  $gU \cap U = \emptyset$  forman un recubrimiento

---

de  $X$ , y por tanto sus imágenes bajo  $q$  forman un recubrimiento de  $X/G$ . Esto nos permite concluir que  $(X/G, \tau_q)$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ . La condición 3 permite ver que  $(X/G, \tau_q)$  es de Hausdorff. El que  $(X/G, \tau_q)$  sea 2-contable se deriva fácilmente.

Supongamos ahora que partimos de una  $m$ -variedad suave  $(M, \mathcal{A})$ , y que tenemos una acción  $a$  de un grupo  $G$  sobre  $M$  (visto como conjunto). El siguiente teorema nos da condiciones sobre  $a$  para que  $M/G$  herede una estructura suave.

**Teorema 5.** *Sea  $(M, \mathcal{A})$  una  $m$ -variedad suave, donde  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  no es necesariamente maximal, y  $a$  una acción de un grupo  $G$  sobre  $M$ . Si  $a$  satisface las tres condiciones:*

1. *Para cada  $g \in G$ ,  $T_g : M \rightarrow M$ ,  $g \in G$  es un difeomorfismo*
2. *para cada  $x \in M$  existe un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $x \in U$  y  $gU \cap U = \emptyset$  para cada  $g \neq e$*
3. *para todo par de puntos  $x, y \in M$  con  $y \notin Gx$ , existen abiertos  $U$  y  $V$ , con  $x \in U$  y  $y \in V$ , tales que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g \in G$ .*

*entonces se puede definir un atlas suave para  $M/G$  de la siguiente manera: Sea  $y \in M/G$ . Escogemos algún  $x \in M$  tal que  $q(x) = y$ . Ahora, sabemos que existen un  $\alpha \in I$  tal que  $x \in U_\alpha$ , y un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $x \in U$  y  $gU \cap U = \emptyset$  para todo  $g \neq e$ . Entonces  $(U' := U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U'})$  es una carta de  $M$  suave compatible con  $\mathcal{A}$ , y además  $q : U' \rightarrow q(U')$  es un homeomorfismo. Si definimos  $V_y := q(U')$  y  $\psi_y := \varphi_\alpha|_{U'} \circ q^{-1}$ , entonces  $\{(V_y, \psi_y) : y \in M/G\}$  resulta ser un atlas suave para  $M/G$ . Más aún, la proyección canónica  $q : M \rightarrow M/G$  resulta ser una función recubridora suave, es decir, es una función recubridora en el sentido del teorema 4, en la que cada función  $q : U_x \rightarrow V$  no sólo es un homeomorfismo, sino un difeomorfismo. En particular,  $q$  es un difeomorfismo local, es decir, para cada  $x \in M$  existe un abierto  $U$  con  $x \in U$  tal que  $q : U \rightarrow q(U)$  es un difeomorfismo.*

Finalmente, supongamos que partimos de una  $m$ -variedad riemanniana  $(M, g)$  y de una acción  $a$  de un grupo  $G$  sobre  $M$ . El siguiente teorema nos da condiciones sobre  $a$  para que  $M/G$  herede una estructura de  $m$ -variedad riemanniana.

**Teorema 6.** *Sea  $(M, \mathcal{A})$  una  $m$ -variedad suave, donde  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$  no es necesariamente maximal,  $g$  una estructura riemanniana para esta*

---

variedad, y a una acción de un grupo  $G$  sobre  $M$ . Si  $a$  satisface las tres condiciones:

1. Para cada  $g \in G$ ,  $T_g : M \rightarrow M$ ,  $g \in G$  es una isometría
2. para cada  $x \in M$  existe un abierto  $U$  de  $M$  tal que  $x \in U$  y  $gU \cap U = \emptyset$  para cada  $g \neq e$
3. para todo par de puntos  $x, y \in M$  con  $y \notin Gx$ , existen abiertos  $U$  y  $V$ , con  $x \in U$  y  $y \in V$ , tales que  $gU \cap V = \emptyset$  para todo  $g \in G$ .

entonces se puede definir una estructura riemanniana para  $M/G$  de la siguiente manera: Se toma el atlas suave  $\{(V_y, \psi_y) : y \in M/G\}$  del teorema anterior. Para cada  $y \in M/G$  sea  $h^y : \psi_y(V_y) (= \varphi_\alpha(U') \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)) \rightarrow \text{Mat}_{s,dp}(m)$  la restricción de  $g^\alpha$  a  $\psi_y(V_y)$ . Las  $h^y$  con  $y \in M/G$  forman una estructura riemanniana para  $M/G$ . Más aún, la proyección canónica  $q : M \rightarrow M/G$  resulta ser una función recubridora isométrica, es decir,  $q$  es una función recubridora suave en el sentido del teorema 5, en la que cada función  $q : U_x \rightarrow V$  no sólo es un difeomorfismo, sino que es una isometría. En particular,  $q$  es una isometría local, es decir, para cada  $x \in M$  existe  $U$  con  $x \in U$  tal que  $q : U \rightarrow q(U)$  es una isometría.

El siguiente teorema sera de gran utilidad en la determinación de las autofunciones del operador de Laplace-Beltrami de los espacios lente esféricos. Sea  $M/G$  la variedad riemanniana construida como en el teorema 6. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $G$ -periódica, es decir, tal que para todo  $x \in M$  y  $g \in G$ ,  $f(gx) = f(x)$ , entonces la regla  $\check{f}$  que le asigna a cada  $y \in M/G$  el real  $f(x)$  donde  $x$  es algún punto de  $q^{-1}(y)$ , es una función bien definida. Si  $f$  es suave, se puede ver que  $\check{f}$  es automáticamente suave. Recíprocamente, si  $h : M/G \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, entonces la composición  $\hat{h} := h \circ q$  es una función de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , que es  $G$ -periódica. Se puede ver que si  $h$  es suave, entonces  $\hat{h}$  es suave. Más aún, si denotamos por  $C_G^\infty(M)$  a  $\{f \in C^\infty(M) : \forall x \in M, \forall g \in G, f(gx) = f(x)\}$ , se deduce que la regla que le asigna a cada  $f \in C_G^\infty(M)$  la función  $\check{f} \in C^\infty(M/G)$ , es una biyección, cuya inversa es precisamente la regla  $h \rightarrow \hat{h}$ . A la función  $\check{f}$  se le llama *descenso* de  $f$ , y a la función  $\hat{h}$  se le llama *levantamiento* de  $h$ .

**Teorema 7.** Sea  $M/G$  la variedad riemanniana construida como en el teorema 6. Una  $h \in C^\infty(M/G)$  es una autofunción del operador de Laplace-Beltrami de  $M/G$  con autovalor  $\lambda$  si y sólo si su levantamiento  $\hat{h}$  es una autofunción del operador de Laplace-Beltrami en  $M$  con autovalor  $\lambda$ .

---

El teorema anterior se puede enunciar de manera equivalente diciendo que  $f \in C_G^\infty(M)$  es una autofunción del operador de Laplace-Beltrami de  $M$  con autovalor  $\lambda$  si y sólo si su descenso  $\tilde{f}$  es una autofunción del operador de Laplace-Beltrami en  $M/G$  con autovalor  $\lambda$ .



---

## Capítulo 3

# Motivación y El Círculo

---

Este capítulo muestra la motivación que nos lleva a la formulación de la pregunta de investigación y al desarrollo de este trabajo, además se plantea un ejemplo que resulta ser el punto de partida.

### 3.1. Algunos Antecedentes

En 1990 S.T. Yau propuso algunas preguntas importantes en geometría. Una de ellas se refiere al número de puntos críticos de las autofunciones del laplaciano sobre una variedad Riemanniana [2]. Concretamente Yau preguntó si era cierto que para toda variedad riemanniana compacta  $(M, g)$  cuyo espectro del operador de Laplace - Beltrami es  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , entonces si  $\{f_i\}$  es una sucesión de funciones tal que  $f_i$  es autofunción con valor propio  $\lambda_i$ , se tiene que el número de puntos críticos de  $f_i$  tienden a infinito, cuando  $i$  tiende a infinito.

D. Jakobson y N. Nadirashvili en 1999 muestran un contra-ejemplo a la propuesta de Yau, enuncian que dicho cuestinamiento no es cierto en todos los casos, luego el número de puntos críticos presentes en la variedad es acotado [3], y presentan dicho resultado para un toro dos dimensional con una métrica especial.

Z. Tang y W. Yan en 2012, realizan un estudio de las autofunciones en Hipersuperficies y encuentran allí una serie de contraejemplos del la cojetura de Yau, pero resaltan que para una métrica genérica es posible que la conjetura sea cierta [5].

De otra parte la última década de su vida, Lang desarrollo un gran fervor por el kernel del calor. Señalo que este juega un papel fundamental en el esclarecimiento de cuestiones profundas en las matematicas [6], lo cual presenta

junto a Jay Jorgenson en el artículo “*The Ubiquitous Heat Kernel*”.

### 3.2. Ejemplo $M = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Sea  $M = S^1$  el círculo de radio 1. Allí  $\Delta_g f = f''(x)$  y la ecuación del calor puede escribirse como

$$\frac{\partial f}{\partial t} - f''(x) = 0$$

y su solución esta determinada por la ecuación diferencial

$$f'' + \lambda f = 0,$$

la cual satisface que

1.  $f(0) = f(2\pi)$
2.  $f'(0) = f'(2\pi)$

La solución de dicha ecuación diferencial es  $m^2 + \lambda = 0$ , luego

$$m^2 = -\lambda = \begin{cases} \lambda > 0 & \Rightarrow m = \pm\sqrt{|\lambda|}i \\ \lambda = 0 & \Rightarrow m = 0 \\ \lambda < 0 & \Rightarrow m = \pm\sqrt{|\lambda|} \end{cases}$$

Ahora si  $\lambda > 0$ , la solución de la ecuación esta dada por combinaciones lineales de las funciones  $e^{\sqrt{\lambda}ix}$  y  $e^{-\sqrt{\lambda}ix}$ , de allí una base es  $\{ \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x) \}$ ; las condiciones iniciales nos llevan a concluir que los valores propios son  $\lambda = k^2$  donde  $k \in \mathbb{Z}$ .

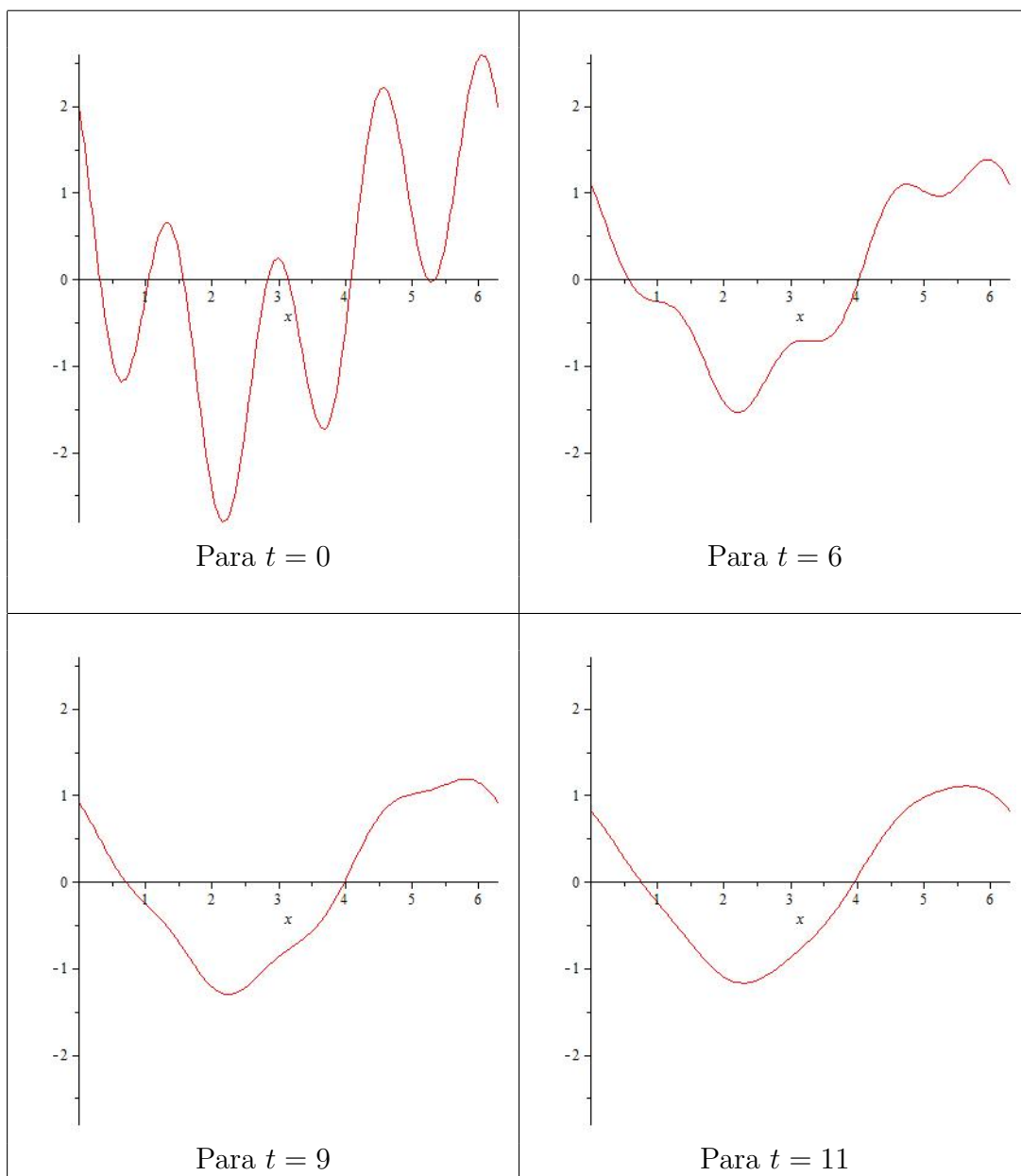
En conclusión los únicos valores propios son  $k^2$  con  $k = 0, 1, \dots$ , y

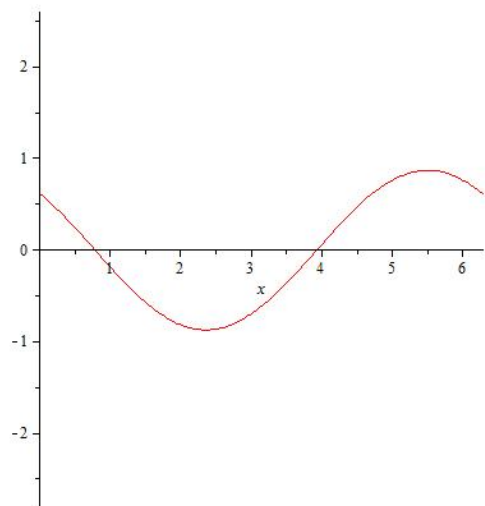
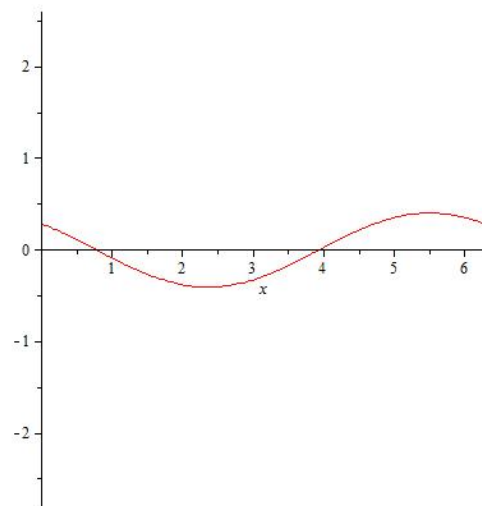
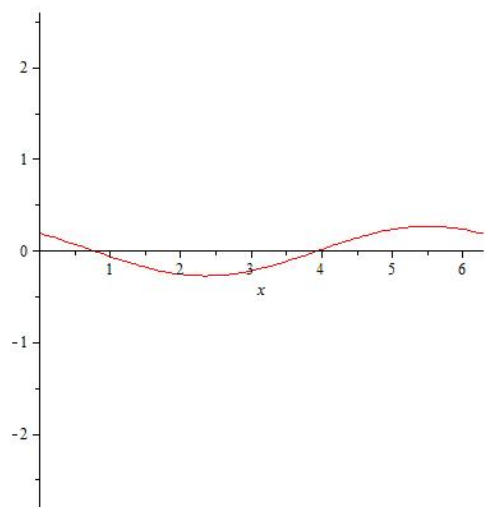
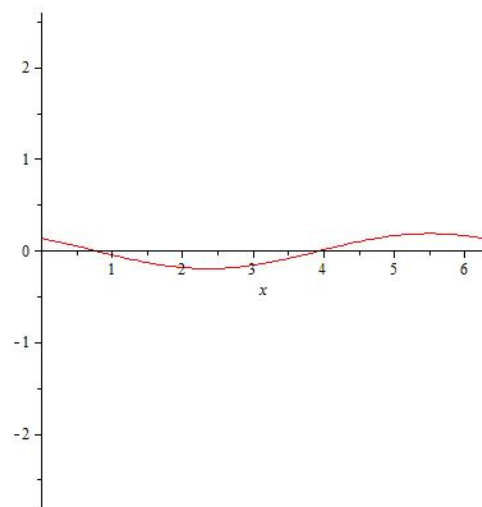
$$E_{k^2} = \{ c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

La solución de la ecuación del calor con dato inicial  $f_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , es:

1.  $f_0 = c_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$
2.  $f_t(x) = c_0 + e^{-t}(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + e^{-4t}(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$

Estos resultados fueron simulados en MAPLE 14, como se muestra.



Para  $t = 25$ Para  $t = 65$ Para  $t = 83$ Para  $t = 100$

---

## Capítulo 4

# Espacios Lente

---

El estudio de los espacios lente data desde 1908, cuando Tieze publico el artículo “*Über die topologischen invarianten mehrdimensionaler mannigfaltigkeiten*” aunque el término de espacio lente se introdujo sólo hasta 1930 por Seifert y Threlfall, desde entonces dichos espacios han tenido gran auge en el estudio de las 3-variedades.

Existen diferentes formas de obtener una representacion de los espacios lente (al menos 5). En este trabajo se presenta el modelo algebraico, el cual se describe a continuación.

### 4.1. Modelo algebraico de los espacios lente esféricos

Es conveniente entender que  $\mathbb{R}^4$  se puede identificar con  $\mathbb{C}^2$  de la siguiente forma  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$ , y además entender la esfera 3-dimensional  $S^3$  simultáneamente como

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\},$$

y

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Es posible verificar que  $S^3$ , dotado de la topología de subespacio de  $(\mathbb{R}^4, \tau_{usual})$ , es una 3-variedad topológica compacta. En efecto, los ocho conjuntos  $U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_i > 0\}$ ,  $U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_i < 0\}$  donde  $i = 1, 2, 3, 4$  son abiertos de  $S^3$  cuya unión es  $S^3$ , y las funciones  $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow B^3$  con  $\varphi_i^+(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\wedge i}$ ,  $\varphi_i^- : U_i^- \rightarrow B^3$  con

$\varphi_i^-(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\wedge i}$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\wedge i$  indica supresión de la coordenada  $i$  y  $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 1\}$  es la bola abierta unitaria en  $\mathbb{R}^3$ , son todos homeomorfismos. Más aún, se puede ver que son suave compatibles y por tanto que  $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-) : i = 1, 2, 3, 4\}$  es un atlas suave para  $S^3$  (que consta de ocho cartas). Veamos ahora como la esfera  $S^3$  hereda una estructura riemanniana de  $\mathbb{R}^4$ . Para cada  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  y  $\sigma \in \{+, -\}$  definimos las funciones  $f_i^\sigma := \text{incl}_i^\sigma \circ (\varphi_i^\sigma)^{-1} : B^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  donde  $\text{incl}_i^\sigma : U_i^\sigma \rightarrow \mathbb{R}^4$  es la función inclusión. Definimos ahora  $g_i^\sigma(\mathbf{x}) := J_{f_i^\sigma}(\mathbf{x})^T J_{f_i^\sigma}(\mathbf{x})$  para cada  $\mathbf{x} \in \varphi_i^\sigma(U_i^\sigma) = B^3$ . Se puede ver que las ocho  $g_i^\sigma$  forman una estructura riemanniana sobre  $S^3$ . De acuerdo a esta geometría, la longitud de una curva contenida en  $S^3$  es la misma que la longitud usual cuando la misma curva se considera como contenida en  $\mathbb{R}^4$ . A la estructura riemanniana que hemos definido la denotaremos por  $g$ .

Sean ahora  $p, q$  dos enteros relativamente primos, es decir, cuyo máximo común divisor es 1. Denotemos por  $\mathbb{Z}_p$  al grupo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Definimos la función  $a_{p,q} : \mathbb{Z}_p \times S^3 \rightarrow S^3$  como  $a_{p,q}(m, (z_1, z_2)) = (e^{\frac{2\pi im}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi imq}{p}} z_2)$ . Se puede demostrar que  $a_{p,q}$  es una acción que satisface todas las condiciones del teorema 6.

**Definición 12.** Sean  $p, q$  enteros que son primos relativos. Se llama espacio lente esférico  $L(p, q)$ , a la variedad riemanniana 3-dimensional  $S^3/\mathbb{Z}_p$  determinada por la acción  $a_{p,q}$ .

Abusando un poco de la notación, denotaremos a la estructura riemanniana de  $L(p, q)$  como  $g$ .

Del hecho de que  $S^3$  es compacto (puesto que es un cerrado acotado de  $\mathbb{R}^4$ ) se deriva fácilmente que cada  $L(p, q)$  es compacto.

---

## Capítulo 5

# Ecuación del calor sobre espacios lente

---

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento a largo plazo de las soluciones de la ecuación del calor con dato inicial genérico, en los espacio lente esféricos. Ahora, como ya hemos visto, solucionar la ecuación del calor en una variedad riemanniana se reduce a conocer los autovalores  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots$  y autoespacios  $E_j$  del operador de Laplace-Beltrami de la variedad. En [11] se presenta un método para calcular explícitamente los autovalores y las autofunciones de cada espacio lente esférico  $L(p, q)$ . En este capítulo describiremos, de manera breve, dicho método.

### 5.1. Coordenadas Toroidales

El teorema 7 nos dice que los autoespacios de  $L(p, q)$  se obtienen como los descensos de aquellas intersecciones  $E_j^{\mathbb{Z}_p}(S^3) := E_j(S^3) \cap C_{\mathbb{Z}_p}^\infty(S^3)$ , con  $j = 0, 1, \dots$  que no sean triviales, es decir, que no consten solamente de la función constante cero; y que la lista ordenada  $\lambda'_0 = 0 < \lambda'_1 < \dots$  de los autovalores de  $L(p, q)$  se obtiene tomando la lista de los autovalores de  $S^3$ ,  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots$ , y suprimiendo de ella aquellos  $\lambda_j$  tales que  $E_j^{\mathbb{Z}_p}(S^3)$  (o, equivalentemente, su descenso) no es trivial.

Para determinar aquellos  $E_j^{\mathbb{Z}_p}(S^3)$  que no son triviales, los autores de [11] siguen la siguiente estrategia. Primero expresan el problema  $\Delta_{S^3}(f) = \lambda f$  en *coordenadas toroidales*. A continuación explicamos lo que esto significa.

En lo que sigue denotaremos como  $x, y, z, w$  a las coordenadas  $x_1, x_2, x_3, x_4$

de  $\mathbb{R}^4$ . La función

$$\psi : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

dada por

$$\psi(\chi, \theta, \varphi) = (\cos\chi\cos\theta, \cos\chi\sin\theta, \sin\chi\cos\varphi, \sin\chi\sin\varphi),$$

envía cada rectángulo  $\{(\chi_0, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  con  $\chi_0$  en  $(0, \pi/2)$  en un toro y el conjunto de todos estos toros cubren “casi todo”  $S^3$ , excepto en los puntos  $\chi = 0$  y  $\chi = \pi/2$  donde el toro colapsa en los círculos  $S^3 \cap \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1\}$  y  $S^3 \cap \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z^2 + w^2 = 1\}$ , respectivamente. Se puede ver que la restricción de  $\psi$  a  $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  es una biyección. La inversa de esta biyección se llama *coordenadas toroidales para  $S^3$* . Estas coordenadas resultan estar relacionadas de manera muy simple con las acciones que se usan para formar los espacios lente a partir de  $S^3$ . Los autores expresan el problema  $\Delta_{S^3} f = \lambda f$  en estas coordenadas. Encuentran así la forma general de las soluciones a este problema en  $S^3$ , es decir, determinan los autovalores  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots$  y bases  $B_j$  para los autoespacios  $E_j(S^3)$ , expresadas en coordenadas toroidales. Con base en este resultado, determinan, para cada par  $(p, q)$  de enteros primos relativos, combinaciones lineales apropiadas (si las hay) de elementos de  $B_j$ , que resulten  $\mathbb{Z}_p$ -periódicas, y que juntas formen una base de todas las combinaciones lineales  $\mathbb{Z}_p$ -periódicas.

Resulta que los autovalores de  $\Delta_{S^3}$  son  $\lambda_k = k(k+2)$ , donde  $k = 0, 1, \dots$ , y que el correspondiente autoespacio  $E_k(S^3)$  tiene dimensión  $(k+1)^2$ . En lo que sigue usaremos la siguiente notación. Si  $r, s$  son enteros no negativos y  $d$  es un racional, entonces

$$P_d^{(r,s)}(u) = \frac{1}{2^d} \sum_{i=0}^d \binom{r+d}{i} \binom{s+d}{d-i} (u+1)^i (u-1)^{d-i}.$$

Estos polinomios se conocen como *polinomios de Jacobi*. Además, definimos, para enteros  $l, m$ ,  $\Theta_l(\theta) = \cos(|l|\theta)$  si  $l \geq 0$  y  $\Theta_l(\theta) = \sin(|l|\theta)$  si  $l < 0$ ;  $\Phi_m(\varphi) = \cos(|m|\varphi)$  si  $m \geq 0$  y  $\Phi_m(\varphi) = \sin(|m|\varphi)$  si  $m < 0$ . Definimos

$$\tilde{\Psi}_{klm}(\chi, \theta, \varphi) = \cos^{|l|}\chi \sin^{|m|}\chi P_d^{(|m|, |l|)}(\cos 2\chi) \Theta_l(\theta) \Phi_m(\varphi),$$

donde  $d = \frac{k-(|l|+|m|)}{2}$ . Se muestra que el conjunto

$$B_k(S^3) = \left\{ \tilde{\Psi}_{klm}(\chi, \theta, \varphi) : l, m \in \mathbb{Z}, |l| + |m| \leq k, l + m \equiv k \pmod{2} \right\},$$



es una base ortogonal para  $E_k(S^3)$ . El hecho de que el operador  $\Delta_{S^3}$  es autoadjunto hace que  $\cup_{k \geq 0} B_k$  sea una base ortogonal para  $L^2(S^3)$ . Se muestra que la  $L^2$ -norma de  $\tilde{\Psi}_{klm}$  es

$$\sqrt{2^{\widehat{l} + \widehat{m}}} \pi \sqrt{\frac{(|l| + d)! (|m| + d)!}{2(k+1)d! (|l| + |m| + d)!}}$$

donde  $d = \frac{k - (|l| + |m|)}{2}$ ,  $\widehat{l}$  es 1 si  $l = 0$  o es 0 si  $l \neq 0$ , y de igual forma para  $\widehat{m}$ .

Así, si definimos

$$\Psi_{klm} = \tilde{\Psi}_{klm} / \|\tilde{\Psi}_{klm}\|_{L^2} = \frac{\tilde{\Psi}_{klm}}{\sqrt{2^{\widehat{l} + \widehat{m}}} \pi \sqrt{\frac{(|l| + d)! (|m| + d)!}{2(k+1)d! (|l| + |m| + d)!}}}$$

tenemos que para cada  $k \geq 0$ ,

$$\{\Psi_{klm} : l, m \in \mathbb{Z}, |l| + |m| \leq k, l + m \equiv k \pmod{2}\}$$

es una base ortonormal para  $E_k(S^3)$ , y entonces su unión es una base ortonormal para  $L^2(S^3)$ .

Usando las relaciones

$$x = \cos \chi \cos \theta, y = \cos \chi \sin \theta, z = \sin \chi \cos \varphi, w = \sin \chi \sin \varphi$$

se puede ver que

$$P_d^{(|m|, |l|)}(\cos 2\chi) = \sum_{i=0}^d \binom{|m| + d}{i} \binom{|l| + d}{d - i} (x^2 + y^2)^i (-(z^2 + w^2))^{d-i}$$

es un polinomio homogéneo de grado  $2d$ . También se obtiene

$$\cos^{|l|} \chi \cos |l| \theta = \sum_{0 \leq i \leq |l|/2} (-1)^i \binom{|l|}{2i} x^{|l|-2i} y^{2i},$$

un polinomio homogéneo de grado  $|l|$  en las variables  $x, y$ . Esto también ocurre con  $\cos^{|l|} \chi \sin |l| \theta$ ,  $\sin^{|m|} \chi \cos |m| \varphi$ ,  $\sin^{|m|} \chi \sin |m| \varphi$ :  $\cos^{|l|} \chi \sin |l| \theta$  se puede escribir como un polinomio homogéneo de grado  $|l|$  en las variables  $x, y$ , y  $\sin^{|m|} \chi \cos |m| \varphi$ ,  $\sin^{|m|} \chi \sin |m| \varphi$  se pueden escribir como polinomios homogéneos de grado  $|m|$  en las variables  $z, w$ . Concluimos que tanto las funciones  $\tilde{\Psi}_{klm}$  como  $\Psi_{klm}$  se pueden escribir como polinomios homogéneos en las variables  $x, y, z, w$ .

## 5.2. Autofunciones de los espacios lente

Sean  $p, q$  enteros primos relativos. El Teorema 2 de [11] proporciona un método para obtener una base ortonormal para cada autoespacio de  $L(p, q)$  esférico:

Se fija  $k \geq 0$ . Luego se determinan todos los pares  $(l, m)$  de enteros tales que  $|l| + |m| \leq k$  y  $l + m \equiv k \pmod{2}$ . Denotemos por  $A_k$  al conjunto de estos pares. Se toma el conjunto formado por todas las siguientes funciones:

1.  $\Psi_{k,0,0}$
2.  $\Psi_{k,l,0}, \Psi_{k,-l,0}$  donde  $(l, 0) \in A_k$ ,  $l > 0$ ,  $l \equiv 0 \pmod{p}$
3.  $\Psi_{k,0,m}, \Psi_{k,0,-m}$  donde  $(0, m) \in A_k$ ,  $m > 0$ ,  $qm \equiv 0 \pmod{p}$
4.  $\sqrt{\frac{1}{2}}(\Psi_{k,l,m} + \Psi_{k,-l,-m}), \sqrt{\frac{1}{2}}(\Psi_{k,-l,m} - \Psi_{k,l,-m})$  donde  $(l, m) \in A_k$ ,  $l > 0$ ,  $m > 0$ ,  $l \equiv qm \pmod{p}$
5.  $\sqrt{\frac{1}{2}}(\Psi_{k,l,m} - \Psi_{k,-l,-m}), \sqrt{\frac{1}{2}}(\Psi_{k,-l,m} + \Psi_{k,l,-m})$  donde  $(l, m) \in A_k$ ,  $l > 0$ ,  $m > 0$ ,  $l \equiv -qm \pmod{p}$

El conjunto formado por el descenso a  $L(p, q)$  de todas estas funciones, es una base ortonormal del autoespacio con autovalor  $k(k+2)$ . Para algunos valores de  $k$  resulta que el conjunto es vacío, lo cual indica que el correspondiente valor  $k(k+2)$  no es autovalor del operador de Laplace-Beltrami de  $L(p, q)$ .

## 5.3. Un ejemplo: Autofunciones de $L(2, 3)$

Esta sección tiene por objeto ejemplificar como se determina una base para cada autoespacio de  $L(2, 3)$ .

**El primer autoespacio está determinado por  $k = 0$**

Si  $k = 0$  los únicos valores de  $l, m$  que satisfacen que  $|l| + |m| \leq k$  y  $l + m \equiv k \pmod{2}$ , son  $l = 0$  y  $m = 0$ . Por lo tanto dicho autoespacio sólo contiene la autofunción  $\Psi_{0,0,0}$ .

$$\Psi_{0,0,0} = \frac{\tilde{\Psi}_{000}}{\sqrt{2^{1+1}}\pi\sqrt{\frac{(|0|+0)! (|0|+0)!}{2(0+1)0! (|0|+|0|+0)!}}}$$

con  $\tilde{\Psi}_{000} = \cos^{|0|}\chi \sin^{|0|}\chi P_0^{(|0|,|0|)}(\cos 2\chi) \Theta_0(\theta) \Phi_0(\varphi)$ .

Se puede probar que en coordenadas toroidales el polinomio de Jacobi evaluado en  $\cos 2\chi$  se deja escribir como,

$$P_d^{(|m|,|l|)}(\cos 2\chi) = \sum_{i=0}^d \binom{|m|+d}{i} \binom{|l|+d}{d-i} (x^2+y^2)^i (-(z^2+w^2)^{d-i})$$

Así que  $P_0^{(|0|,|0|)}(\cos 2\chi) = 1$ ,  $\Theta_0(\theta) = 1$  y  $\Phi_0(\varphi) = 1$ , de allí que  $\tilde{\Psi}_{000} = 1$  y en conclusión  $\Psi_{0,0,0} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ .

**El segundo autoespacio esta determinado por  $k = 1$**

Si  $k = 1$  los unicos valores de  $l, m$  que satisfacen que  $|l| + |k| \leq k$  y  $l + m \equiv k \pmod{2}$ , son  $l = 0, m = \pm 1$  y  $l = \pm 1, m = 0$ . Veamos que pasa con las restricciones:

1. En  $\Psi_{1,0,0}$  no hay autofunciones, ya que no satisfacen que  $0 + 0 \equiv 1 \pmod{2}$ .
2. Para  $l = \pm 1$ , en  $\Psi_{1,+1,0}, \Psi_{1,-1,0}$  no hay autofunciones ya que  $1 \equiv 0 \pmod{2}$ , y para  $l = 0$  se vuelve a  $\Psi_{1,0,0}$  donde tampoco hay autofunciones.
3. Para  $m = \pm 1$ , en  $\Psi_{1,0,1}, \Psi_{1,0,-1}$  no hay autofunciones ya que  $(3)(1) \equiv 0 \pmod{2}$ , y para  $m = 0$  se vuelve a  $\Psi_{1,0,0}$  donde tampoco hay autofunciones.
4. y 5. por razones similares tampoco contienen autofunciones, por tanto para  $k = 1$  el autoespacio es vacío.

**El tercer autoespacio esta determinado por  $k = 2$**

Verifiquemos el procedimiento para algunos valores

---

1.  $\Psi_{2,0,0}$

$$\Psi_{2,0,0} = \frac{\tilde{\Psi}_{200}}{\sqrt{2^{1+1}}\pi\sqrt{\frac{(|0|+1)! (|0|+1)!}{2(2+1)1! (|0|+|0|+1)!}}}$$

donde  $\tilde{\Psi}_{200} = \cos^{|0|}\chi \sin^{|0|}\chi P_1^{(|0|,|0|)}(\cos 2\chi) \Theta_0(\theta) \Phi_0(\varphi)$  y  $P_1^{(|0|,|0|)}(\cos 2\chi) = (-z^2 - w^2 + x^2 + y^2)$ . Por tanto,

$$\Psi_{2,0,0} = \frac{1}{2} \frac{(-z^2 - w^2 + x^2 + y^2)\sqrt{6}}{\pi}$$

2. Para  $l = \pm 2$  y  $m = 0$ , se tiene  $\Psi_{2,+2,0}$  y  $\Psi_{2,-2,0}$ .

$$\Psi_{2,2,0} = \frac{\tilde{\Psi}_{220}}{\sqrt{2^{0+1}}\pi\sqrt{\frac{(|2|+0)! (|0|+0)!}{2(2+1)0! (|2|+|0|+0)!}}}$$

donde  $\tilde{\Psi}_{220} = \cos^{|2|}\chi \cos 2\theta P_0^{(|0|,|2|)}(\cos 2\chi) = x^2 - y^2$  y  $P_0^{(|0|,|2|)}(\cos 2\chi) = 1$ .

De esta forma,

$$\Psi_{2,2,0} = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - y^2)\sqrt{2}\sqrt{6}}{\pi}$$

Usando el mismo procedimiento se obtiene  $\Psi_{2,-2,0} = \frac{(xy)\sqrt{2}\sqrt{6}}{\pi}$ .

3., 4. y 5. determinan más autofunciones para cada autoespacio.

---

## Capítulo 6

# Verificación Experimental

---

Se puede ver que todos los espacios lente con  $p = 1, -1$  son homeomorfos a  $S^3$ , y aquellos con  $p \neq 1, -1$  no son homeomorfos a  $S^3$ . De aquí en adelante, a los espacios lente con  $p = -1, 1$  los llamaremos *triviales* y a los demás *no triviales*. De hecho los  $L(p, q)$  no triviales tienen *género de Heegaard* 1. Pasamos a explicar esto último. Si  $n \geq 0$  sea

$$B_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2n + 1, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\},$$

y para cada  $i = 1, \dots, n$  sea

$$C_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2i - 1 < x < 2i, -1 < y < 1\}.$$

Llamamos *cuerpo de asa estándar de género  $n$* , o  *$n$ -cuerpo de asa estándar* al subespacio de  $\mathbb{R}^3$ ,  $H_n = B_n - \cup_{i=1}^n C_i$ . El espacio topológico  $H_n$  no satisface la definición de variedad topológica que presentamos al principio de este trabajo, pero sí pertenece a una categoría más general, la de *3-variedades topológicas con frontera*. La frontera de  $H_n$  resulta ser una 2-variedad topológica compacta. Ahora, si se toman dos cuerpos de asa estándar del mismo género,  $H_{n,1}$  y  $H_{n,2}$ , y un homeomorfismo  $h : \partial H_{n,1} \rightarrow \partial H_{n,2}$  entre sus fronteras, se puede construir el espacio  $H_{n,1} \cup_h H_{n,2}$ , el cual resulta ser una 3-variedad topológica compacta. Se puede ver que para toda 3-variedad topológica compacta  $M$  existe algún  $n \geq 0$  y un homeomorfismo  $h : \partial H_{n,1} \rightarrow \partial H_{n,2}$  tal que  $H_{n,1} \cup_h H_{n,2}$  es homeomorfa a  $M$ . Ahora, para un  $M$ ,  $n$  no es único. Se llama *género de Heegaard de  $M$* , al menor  $n$  para el que un tal  $h$  exista. Se verifica inmediatamente que  $S^3$  tiene género de Heegaard cero, por lo que todos los espacios lente triviales tienen género de Heegaard cero. Se sabe además que todos los espacios lente  $L(p, q)$  no triviales tienen género de Heegaard 1. Por otro lado, si  $M$  es una  $m$ -variedad suave compacta y conexa, y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

es una función de Morse con  $k$  puntos críticos, entonces existe otra función de Morse  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  con un número menor o igual que  $k$  de puntos críticos, y que es *ordenada*, es decir, tiene sólo un punto crítico de índice 0, sólo un punto crítico de índice  $m$ , y cumple que si un punto crítico  $x$  tiene índice menor que otro punto crítico  $y$ , entonces  $\tilde{f}(x) < \tilde{f}(y)$ . Ahora, cuando  $m = 3$ , una función de Morse ordenada  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  tiene la propiedad de que existe un real  $a$  para el que existen homeomorfismos  $h_1 : \tilde{f}^{-1}(-\infty, a] \rightarrow H_{n,1}$  y  $h_2 : \tilde{f}^{-1}[a, \infty) \rightarrow H_{n,2}$ , donde  $H_{n,1}$  y  $H_{n,2}$  son cuerpos de asa estándar del mismo género  $n$ . Esto nos dice que  $M$  es homeomorfo al espacio  $H_{n,1} \cup_g H_{n,2}$  donde  $g : \partial H_{n,1} \rightarrow H_{n,2}$  es el homeomorfismo  $g = h_2 \circ h_1^{-1}$ . Además,  $n$  es igual al número de puntos críticos de índice 1 de  $\tilde{f}$  (que a su vez es igual al número de puntos críticos de índice 2 de  $\tilde{f}$ ), lo cual nos dice que el número total de puntos críticos de  $\tilde{f}$  es  $2n + 2$ . Combinando todo lo anterior con el hecho, mencionado antes, de que los  $L(p, q)$  no triviales tienen género de Heegaard 1, concluimos que una función de Morse en un  $L(p, q)$  no trivial tiene que tener 4 puntos críticos o más. Ahora, como la función  $\pi : S^3 \rightarrow L(p, q)$  es  $p$  a uno, el levantamiento a  $S^3$  de una función de Morse de un  $L(p, q)$  no trivial, debe ser de Morse y tener  $4p$  puntos críticos o más. En este capítulo presentamos evidencia experimental de que, en los espacios lente, se cumple que las autofunciones correspondientes al primer autovalor no cero, son genéricamente de Morse y minimales, es decir, que son de Morse y sus levantamientos tienen  $4p$  puntos críticos. Para explicar como se logra esto debemos discutir antes las *proyecciones estereográficas* de  $S^3$ . Recordemos que  $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ . Denotemos por  $N$  y  $S$  a los puntos  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 0, -1) \in S^3$ , respectivamente. Sean  $U_N = S^3 - \{S\}$  y  $U_S = S^3 - \{N\}$ . Estos dos conjuntos son abiertos de  $S^3$  cuya unión es todo  $S^3$ . Definimos la función  $\Phi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^3$  como aquella que envía un punto  $(x_0, y_0, z_0, w_0) \in S^3$  en la tripla  $(x_1, x_2, x_3)$  tal que el punto  $(x_1, x_2, x_3, 0)$  es el punto de intersección entre la única línea de  $\mathbb{R}^4$  que pasa por  $N$  y  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$ , y el hiperplano  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$ . Se puede ver que esta función es un difeomorfismo. Esta función esta dada por  $x_1 = \frac{x}{1+w}$ ,  $x_2 = \frac{y}{1+w}$ ,  $x_3 = \frac{z}{1+w}$ . De forma análoga definimos  $\Phi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^3$  pero en vez de tomar la línea que pasa por  $N$  y  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$ , se toma la línea que pasa por  $S$  y  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$ . Esta función también es un difeomorfismo y su forma explícita es  $x_1 = \frac{x}{1-w}$ ,  $x_2 = \frac{y}{1-w}$ ,  $x_3 = \frac{z}{1-w}$ . La inversa de  $\Phi_S$  esta dada por  $x = \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $y = \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $z = \frac{2x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $w = \frac{-1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ; la inversa de  $\Phi_N$  esta dada por  $x = \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $y = \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $z = \frac{2x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ,  $w =$

$\frac{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ . Es importante observar que  $\Phi_S$  envía al hemisferio sur de  $S^3$ , es decir, el conjunto  $H_S = \{(x, y, z, w) \in S^3 : w \leq 0\}$ , en la bola unitaria cerrada  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ , y que  $\Phi_N$  también envía al hemisferio norte de  $S^3$ , es decir, el conjunto  $H_N = \{(x, y, z, w) \in S^3 : w \geq 0\}$ , en la bola unitaria cerrada.

## 6.1. Simulaciones

A continuación presentamos los pasos que seguimos para ganar evidencia experimental de que en los espacios lente se cumplen las hipótesis del teorema 3.

1. Se toman enteros primos relativos  $p, q$  donde  $p \neq 1, -1$ .
2. Se determinan bases (ortonormales)

$$B_1 = \{\psi_1, \dots, \psi_{m_1}\} \text{ y } B_2 = \{\phi_1, \dots, \phi_{m_2}\}$$

de los levantamientos a  $S^3$ , de los autoespacios  $E_1(L(p, q))$  y  $E_2(L(p, q))$ , respectivamente. Con este fin se escribió una rutina en Maple, a la que llamamos “base”, que recibe como entrada los números  $p, q$  y un entero  $k \geq 0$ , y que calcula la base  $B_{p,q,k}$  descrita en la sección 5.2, escrita en las variables  $x, y, z, w$ . Entonces  $B_1$  y  $B_2$  son respectivamente el primero y el segundo conjuntos no vacíos en la lista  $B_{p,q,1}, B_{p,q,2}, B_{p,q,3}, \dots, B_{p,q,k}, \dots$

3. Se elijen al azar coeficientes reales  $a_1, \dots, a_{m_1}, b_1, \dots, b_{m_2}$  tales que  $\frac{b_1^2 + \dots + b_{m_2}^2}{a_1^2 + \dots + a_{m_1}^2}$  es un número pequeño y se asignan como entradas de una función en Maple.
4. Se toma la función  $f = a_1\psi_1 + \dots + a_{m_1}\psi_{m_1} + b_1\phi_1 + \dots + b_{m_2}\phi_{m_2}$ . Recordemos que  $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .
5. Luego se calculan en Maple las expresiones de las dos funciones  $f_N : B^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_S : B^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como  $f_N = f \circ \Phi_N^{-1}$  y  $f_S = f \circ \Phi_S^{-1}$ . La función  $f_N$  es la forma que toma la restricción de  $f$  al hemisferio norte  $H_N$ , en coordenadas estereográficas tomadas desde  $S$ . De manera similar,  $f_S$  es la forma que toma la restricción de  $f$  al hemisferio sur  $H_S$ , en coordenadas estereográficas tomadas desde  $N$ . Aunque no es lo más correcto, consideramos a  $f_N$  y  $f_S$  escritas en las variables  $x, y, z$ .

6. Se calculan en Maple las expresiones, en  $x, y, z$ , de las funciones  $Hess(f_N) : B^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $Hess(f_S) : B^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $Hess(f_N)(x, y, z)$  es el determinante de la matriz Hessiana de  $f_N$  en el punto  $(x, y, z)$ , y  $Hess(f_S)(x, y, z)$  es el determinante de la matriz Hessiana de  $f_S$  en el punto  $(x, y, z)$ .
7. Se calculan en Maple las expresiones para  $\frac{\partial f_N}{\partial x}, \frac{\partial f_N}{\partial y}, \frac{\partial f_N}{\partial z}$ . Se hace una animación en la que la variable tiempo es  $-1 \leq z \leq 1$ , y que en el instante  $z$  muestra los conjuntos (curvas)

$$C_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f_N}{\partial x}(x, y, z) = 0\}$$

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f_N}{\partial y}(x, y, z) = 0\}$$

$$E_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f_N}{\partial z}(x, y, z) = 0\}$$

$$F_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Hess(f_N)(x, y, z) = 0\}$$

$$G_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Cada curva tiene un color distintivo. La curva  $F_z$  es amarilla y la curva  $G_z$  es negra. Entonces se corre la animación y se detectan los momentos  $z \in [-1, 1]$  en que existe al menos un punto  $(x, y)$  contenido en el interior del círculo  $G_z$  y que sea común a las tres curvas  $C_z, D_z$  y  $E_z$ . Los puntos

$$\{(x, y, z) : z \in [-1, 1], x^2 + y^2 \leq 1 - z^2, (x, y) \in C_z \cap D_z \cap E_z\}$$

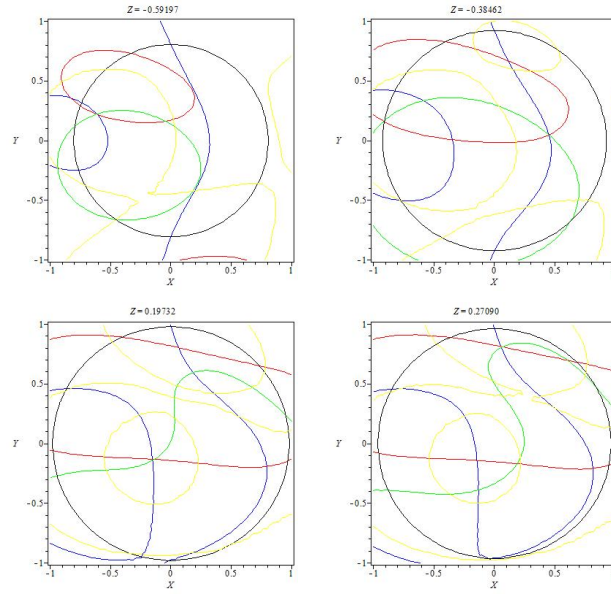
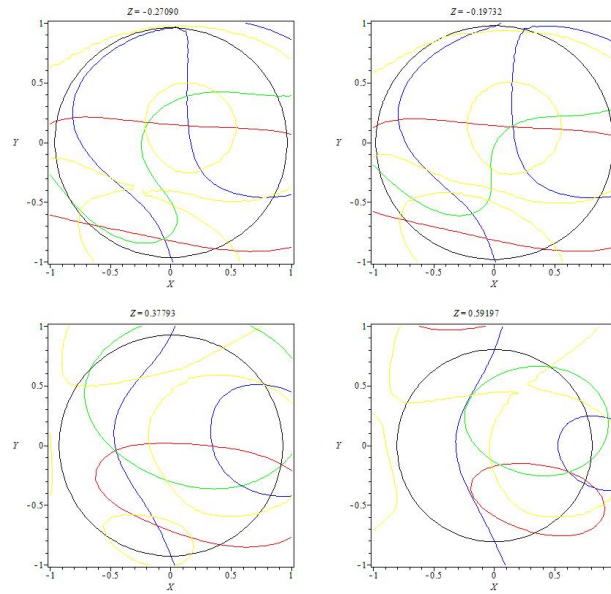
“son” precisamente los puntos críticos de  $f_N$ . Para ver que  $f_N$  “es” de Morse, basta verificar que para cada  $(x, y, z)$  en el conjunto anterior, se cumple que en el cuadro correspondiente al instante  $z$ , el punto  $(x, y)$  no está en  $F_z$ , es decir, en la curva amarilla.

### 6.1.1. Espacio Lenticular $L(2, 3)$

Para el espacio  $L(2, 3)$  se presenta los resultados de la simulación bajo la siguiente función  $f = (1)\psi_1 + (-1)\psi_2 + (0)\psi_3 + (1)\psi_4 + (2)\psi_5 + (-1)\psi_6 + (2)\psi_7 + (1)\psi_8 + (0)\psi_9$ , con  $\psi_i \in B_1$  en  $L(2, 3)$ , satisfaciendo así la hipótesis del teorema 2.

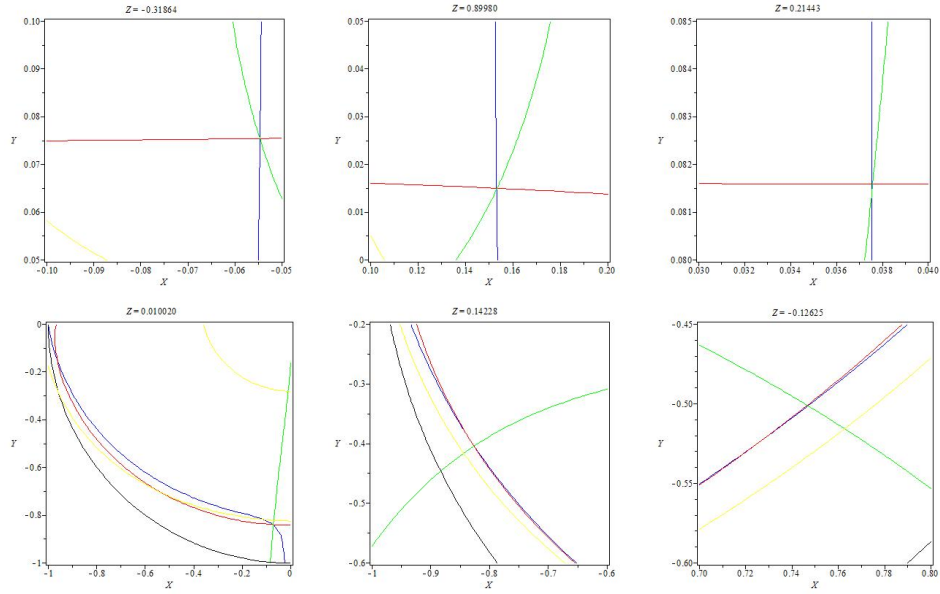
---



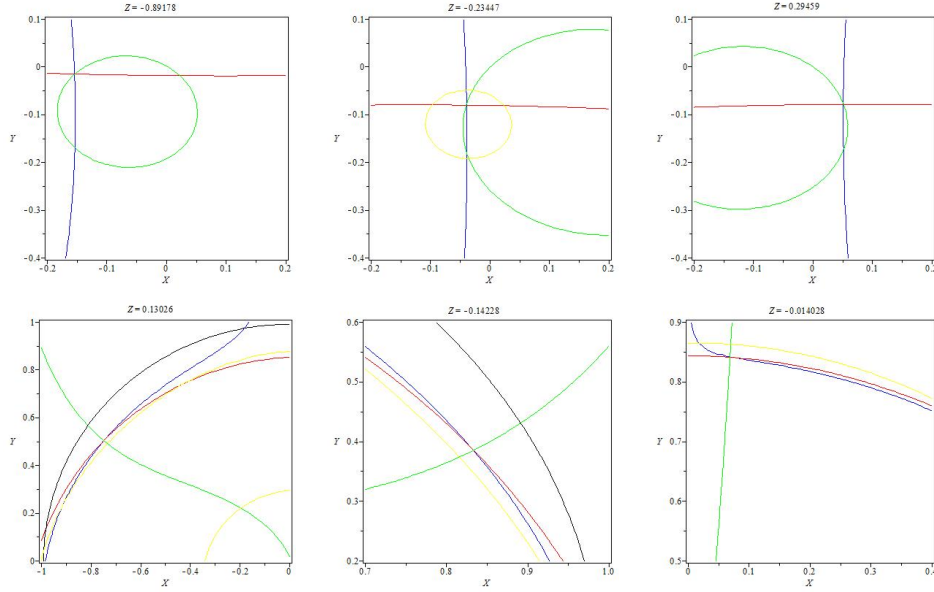
Puntos Críticos  $L(2,3)$  hemisferio nortePuntos Críticos  $L(2,3)$  hemisferio sur

### 6.1.2. Espacio Lenticular $L(3, 2)$

En el espacio  $L(3, 2)$  se presenta los resultados de la simulación bajo la siguiente función  $f = (2)\psi_1 + (-1)\psi_2 + (1)\psi_3 + (0,001)\phi_1 + (0)\phi_2 + (-0,001)\phi_3 + (0,002)\phi_4 + (0)\phi_5 + (0,004)\phi_6 + (0)\phi_7 + (0,005)\phi_8$ , con  $\psi_i \in B_1$  y  $\phi_i \in B_2$  en  $L(3, 2)$ , satisfaciendo así la hipótesis del teorema 3.

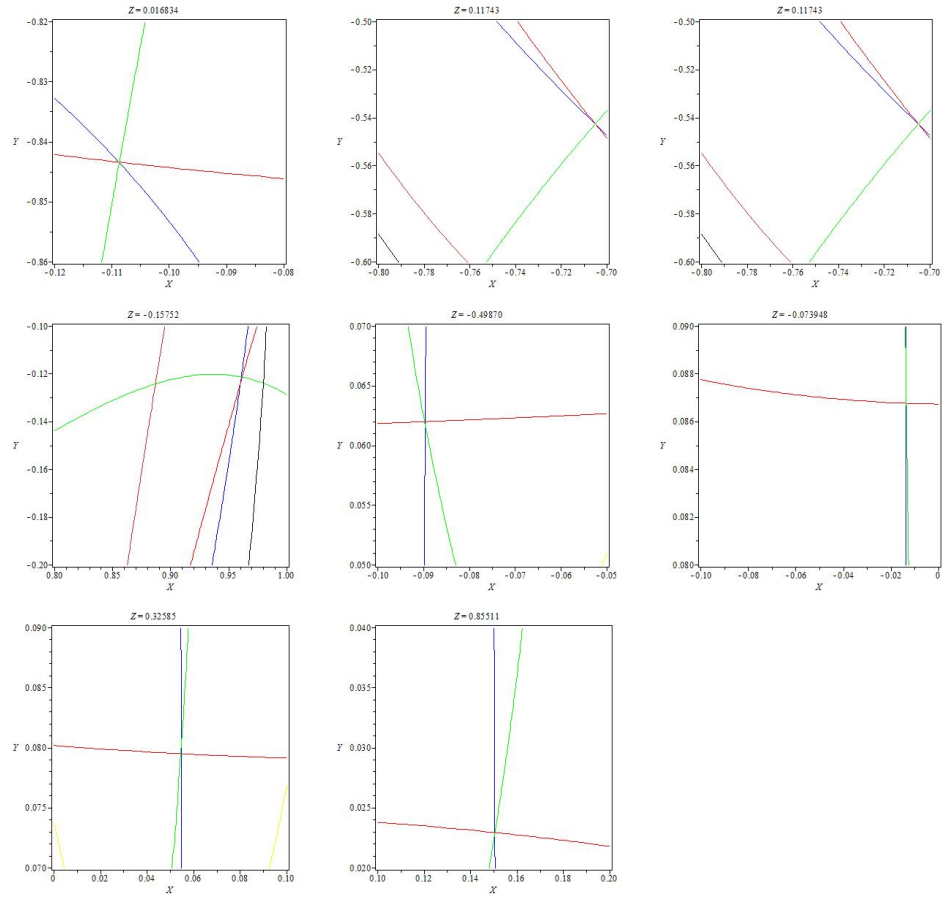


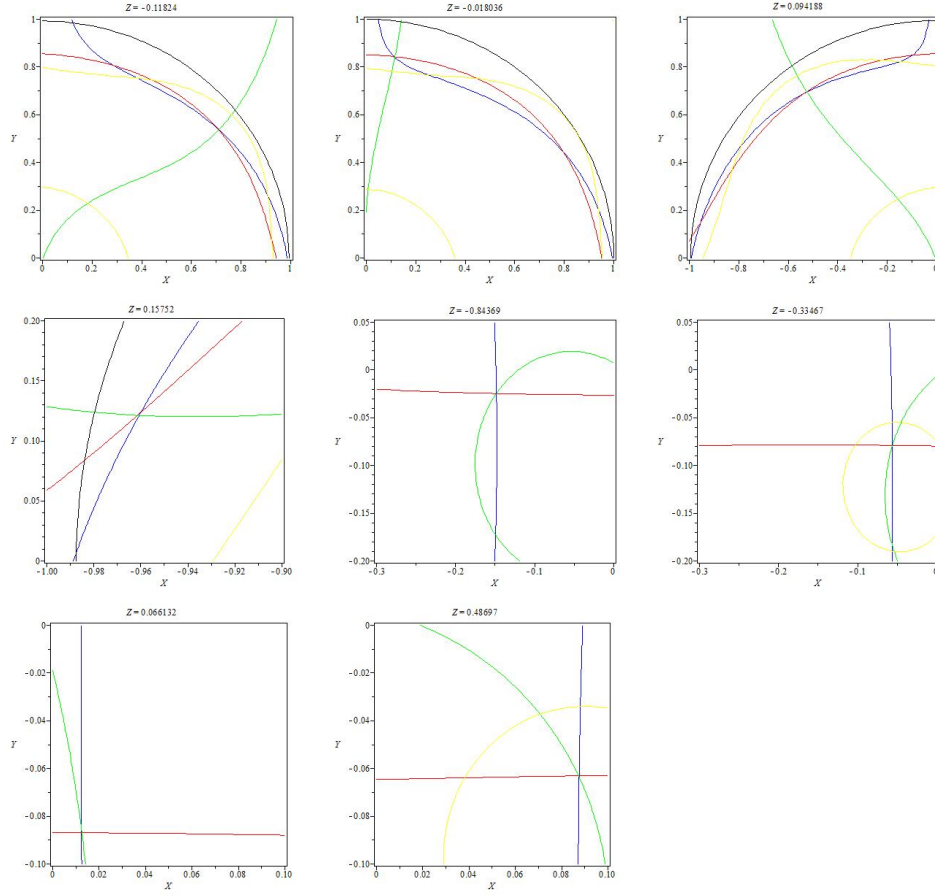
Puntos Críticos  $L(3, 2)$  hemisferio norte

Puntos Críticos  $L(3, 2)$  hemisferio sur

### 6.1.3. Espacio Lenticular $L(4, 3)$

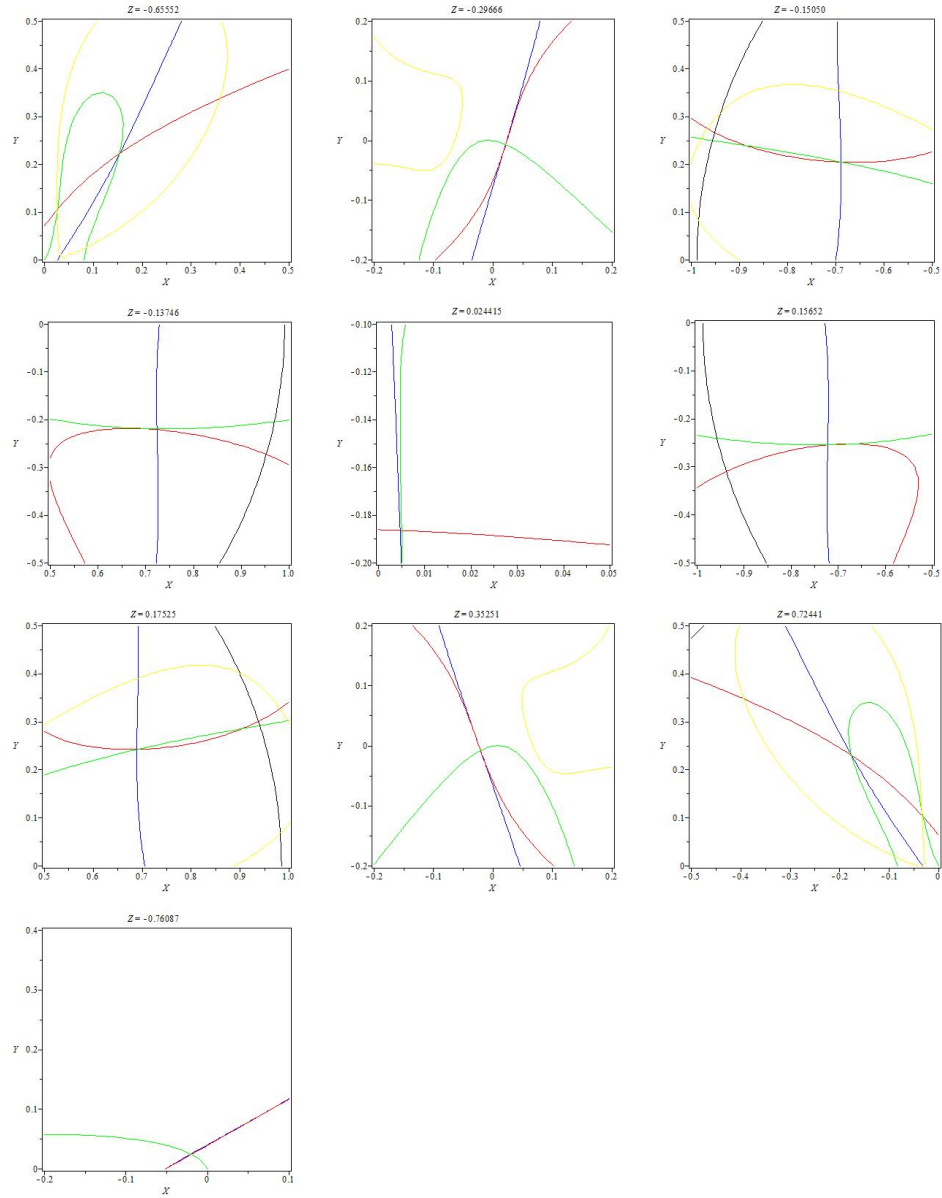
En el espacio  $L(4, 3)$  se presenta los resultados de la simulación bajo la siguiente función  $f = (2)\psi_1 + (-1)\psi_2 + (0)\psi_3 + (0,01)\phi_1 + (0,02)\phi_2 + (-0,01)\phi_3 + (0,02)\phi_4 + (0,01)\phi_5 + (0)\phi_6 + (0,01)\phi_7 + (-0,01)\phi_8 + (-0,01)\phi_9 + (0,02)\phi_{10} + (0,01)\phi_{11} + (0)\phi_{12} + (0,01)\phi_{13} + (-0,01)\phi_{14} + (0)\phi_{15}$ , con  $\psi_i \in B_1$  y  $\phi_i \in B_2$  en  $L(4, 3)$ , satisfaciendo así la hipótesis del teorema 3.

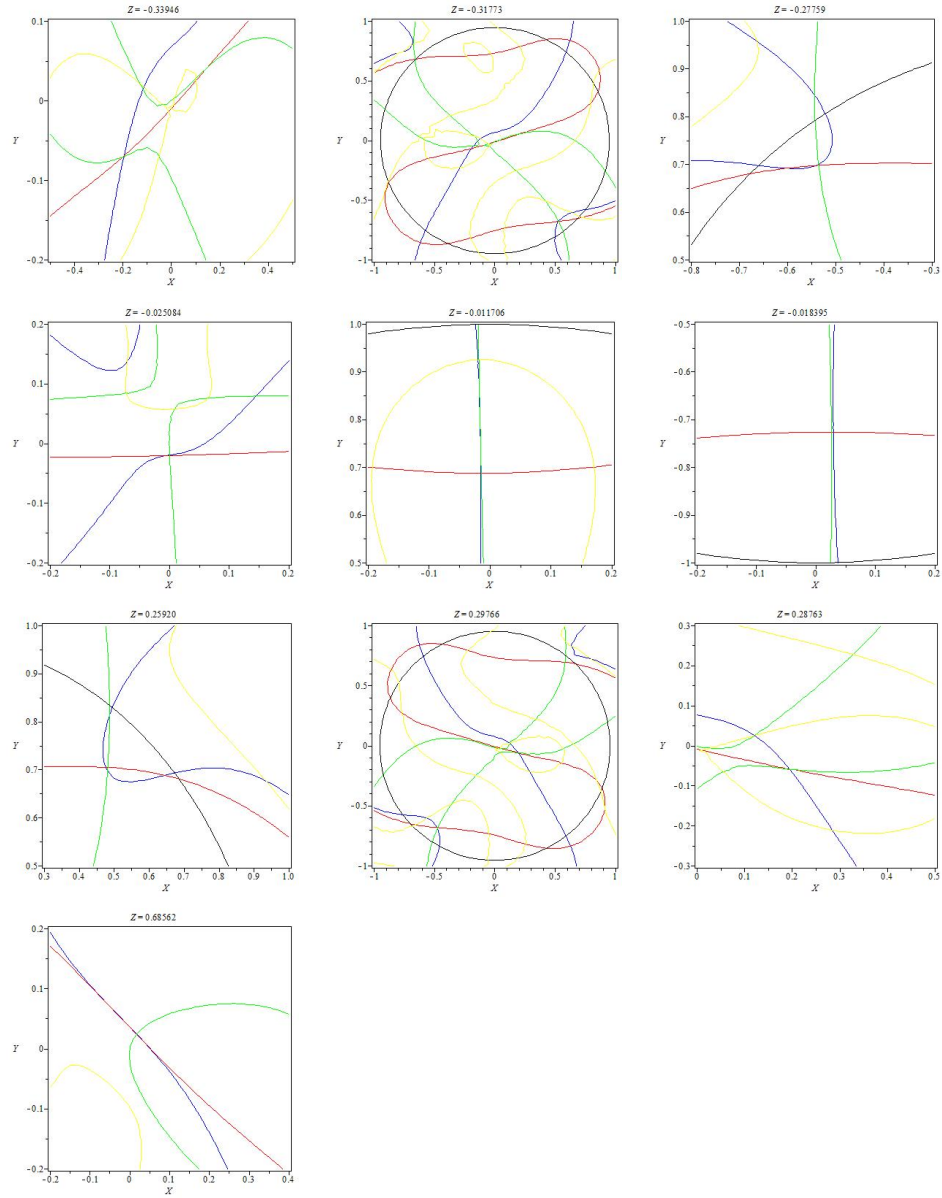
Puntos Críticos  $L(4,3)$  hemisferio norte

Puntos Críticos  $L(4,3)$  hemisferio sur

#### 6.1.4. Espacio Lenticular $L(5,2)$

En el espacio  $L(5,2)$  se presenta los resultados de la simulación bajo la siguiente función  $f = (2)\psi_1 + (-1)\psi_2 + (0,5)\psi_3 + (0,003)\phi_1 + (0,005)\phi_2 + (-0,007)\phi_3 + (0,02)\phi_4 + (-0,006)\phi_5$ , con  $\psi_i \in B_1$  y  $\phi_i \in B_2$  en  $L(5,2)$ , satisfaciendo así la hipótesis del teorema 3.

Puntos Críticos  $L(5, 2)$  hemisferio norte

Puntos Críticos  $L(5, 2)$  hemisferio sur

# Conclusiones

---

1. La revisión de las definiciones, propiedades y teoremas relevantes en las áreas de estudio tratadas en este trabajo de grado, constituyeron parte fundamental para el entendimiento del fenómeno a investigar, y así de esta forma poner en contexto los espacios  $L(p, q)$ , desde el hecho de la construcción de los mismos hasta definir funciones sobre estos espacios, además los teoremas 2 y 3 constituyen la base para determinar experimentalmente que el fenómeno esta presente en algunos espacios  $L(p, q)$ .
2. Para la identificación de los autoespacios del Laplaciano sobre espacios lente esféricos  $L(p, q)$  el artículo [11] fue fundamental, ya que allí se presenta un método iterativo que permite asignar una regla que determina explícitamente cada conjunto de autofunciones, esto facilitó la implementación en el software MAPLE 14, obteniendo como resultado un programa que calcula dado un autovalor su correspondiente conjunto de autofunciones.
3. La implementación en el software MAPLE 14 tuvo 3 etapas fundamentales, la primera en la que se determina el conjunto de autofunciones del Laplaciano sobre espacios lente  $L(p, q)$ , la segunda en la que se construye una función como combinación lineal de las autofunciones y la tercera en la que se visualizan las trazas de las derivadas parciales de la función parametrizada y el determinante del Hessiano, con el propósito de observar los puntos críticos, en el trabajo de grado fue posible explicar toda la implementación en el software desde los componentes teóricos relevantes en cada etapa.
4. La verificación experimental dejo ver que no todos los espacios lente  $L(p, q)$  satisfacen las hipótesis del teorema 2, sólo se pudo establecer que



para el espacio  $L(2, 3)$  dicha hipótesis es cierta, es decir, que cualquier combinación lineal de autofunciones del primer autoespacio después del no nulo, es una función de Morse minimal, pero también se pudo apreciar que aquellos espacios lente  $L(p, q)$  que no satisfacen las hipótesis del teorema 2, si satisfacen las del teorema 3, como se mostró en el capítulo 6.

5. Encontrar evidencia experimental de la presencia de funciones de Morse minimales en los espacios  $L(2, 3)$ ,  $L(3, 2)$ ,  $L(4, 3)$  y  $L(5, 2)$  vía ecuación del calor, constituyen encontrar tantos experimentos como espacios homeomorfos tengan cada uno de ellos, ya que dos variedades riemannianas de curvatura constante 1, no pueden ser homeomorfas sin ser isométricas [12].

# Bibliografía

---

- [1] S. T. Yau *Problem section, Seminar on Differential Geometry*, ed by S. T. Yau, Ann. of Math Stud. 102 (1982) 669 - 706.
- [2] S.T Yau. *Open problems in geometry, Differential geometry partial differential equations on manifolds* Proc. Symp. Pure Math. 54 (1993) 1 - 28.
- [3] D. Jakobson y N. Nadirashvili *Eigenfuntions with few critical points*, J Differential Geometry, 53(1999) 177 - 182.
- [4] P.W. Jones, M. Maggioni, and R. Schul, *Manifold parametrizations by eigenfunctions of the Laplacian and heat kernels*, Proc. National Academy of Sciences 105 (2008), no. 6, 1803.
- [5] Z Tang, W Yan, *Critical Sets of Eigenfunctions and Yau Conjeture*, arXiv:1203.2089v1 [math.DG] 9 Mar 2012
- [6] J. Jorgenson and S. Lang, *The Ubiquitous Heat Kernel*, In: Mathematics Unlimited - 2001 and beyond, Springer Verlag, Berlin, 2001, pp. 655-683
- [7] Chavel Issac, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc, 1984.
- [8] Rosenberg, Steven, *The Laplacian on a Riemannian Manifold: An Introduction to Analysis on Manifolds* London Mathematical Society Student Texts, 1997.
- [9] Mather John, *Stability of  $C^\infty$  mappings implies Stability*, Annals of Mathematics, "nd Ser., Vol. 89, No.2. (Mar., 1969, pp.254-291.
- [10] Hirsch Morris, *Differential Topology*, Springer-Verlag 1976.

- 
- [11] R. Lehoucq, J. Uzan and J. Weeks, *Eigenmodes of Lens and Prism Spaces*, KODAI MATH. J. 26 (2003), 119136.
  - [12] G. De Rham, *Sur les complexes avec automorphismes*, Commentarii Mathematici Helvetici, Volume 12, Issue 1 , 1939, pp 191-211.
-